Corso di Laurea Specialistica/Magistrale

Topologia Algebrica

Esame del 21/07

Esercizio 1. Determinare la coomologia di de Rham di $\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$.

Esercizio 2. Sia (E, π_E, X) un fibrato vettoriale e sia $\{U_\alpha\}$ un ricoprimento di aperti banalizzanti per E. Rimane allora definito il cociclo $\{g_{\alpha\beta}\}$ delle funzioni di transizione

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})$$

Sia ora (F, π_F, X) un secondo fibrato e supponiamo che gli aperti $\{U_\alpha\}$ siano banalizzanti anche per (F, π_F, X). Sia $\{f_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})\}$ il cociclo associato a questo secondo fibrato. In generale diremo che due cocicli $\{k_{\alpha\beta}\}$ e $\{h_{\alpha\beta}\}$ sono equivalenti se $\forall \alpha$ esiste $\lambda_\alpha : U_\alpha \to GL(k, \mathbb{R})$ continuo tale che

$$k_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha h_{\alpha\beta} \lambda_\beta^{-1} .$$

Verificare che (E, π_E, X) *è isomorfo a* (F, π_F, X) *se e solo se i rispettivi cocicli sono equivalenti.*

Esercizio 3 Sia E un fibrato reale (risp. complesso) di rango k su M compatta. Verificare che il gruppo di struttura di E è riducibile a $O(k)$ (risp. a $U(k)$).

Esercizio 4. Sia M una varietà differenziabile *compatta* e sia ω una 1-forma mai nulla. Dimostrare che ω non può essere esatta.