**Corso di Laurea Specialistica/Magistrale**

*Topologia Algebrica*

**Esame del 29/09**

**Esercizio 1.** Sia $M$ una varietà topologica di dimensione $n$ ed $x \in M$. Calcolare $H_j(M, M \setminus \{x\})$.

**Esercizio 2.** Determinare la coomologia a coefficienti in $\mathbb{R}$ del toro con due buchi.

**Esercizio 3.** Sia $M$ una varietà differenziabile **compatta** e sia $\omega$ una 1-forma mai nulla. Dimostrare che $\omega$ non può essere esatta.

**Esercizio 4.** Sia $(E, \pi_E, X)$ un fibrato vettoriale e sia $\{U_\alpha\}$ un ricoprimento di aperti banalizzanti per $E$. Rimane allora definito il cociclo $\{g_{\alpha\beta}\}$ delle funzioni di transizione

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})$$

Sia ora $(F, \pi_F, X)$ un secondo fibrato e supponiamo che gli aperti $\{U_\alpha\}$ siano banalizzanti anche per $(F, \pi_F, X)$. Sia $\{f_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})\}$ il cociclo associato a questo secondo fibrato. In generale diremo che due cocicli $\{k_{\alpha\beta}\}$ e $\{h_{\alpha\beta}\}$ sono equivalenti se $\forall \alpha$ esiste $\lambda_\alpha : U_\alpha \to GL(k, \mathbb{R})$ continuo tale che

$$k_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha h_{\alpha\beta} \lambda_\beta^{-1} .$$

*Verificare che $(E, \pi_E, X)$ è isomorfo a $(F, \pi_F, X)$ se e solo se i rispettivi cocicli sono equivalenti.*