

ALGEBRA 1 — Quarto esame scritto
19 Settembre 2011

- (1) Determinare se $[9999^{9999}]$ e $[10000^{10000}]$ siano invertibili in $\mathbb{Z}/(1001)$.
- (2) Calcolare la cardinalità dell'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1 \text{ e } xy \in \mathbb{Q}\}$.
- (3) Sia $I \subset \mathbb{Z}[i]$ l'ideale generato dagli elementi $6 + 7i, 10 + 11i$. Decidere se $3 + 5i \in I$.
- (4) Dire se il polinomio $x^4 + 100$ sia riducibile o irriducibile negli anelli $\mathbb{Z}[x]$ e $\mathbb{Q}[x]$.
- (5) Sia $M \subset \mathbb{Z}^3$ il sottomodulo generato dagli elementi $(3, 2, 1), (1, 2, 3), (4, 4, 4)$.
 - (a) Determinare se M sia finito o infinito.
 - (b) Determinare se \mathbb{Z}^3/M sia finito o infinito.