Geometria 1. I^0 Modulo. a.a. 00/01.
Esame del 7/2/01

Esercizio 1. Sia $RC(O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ un riferimento cartesiano nello spazio affine con coordinate associate (x, y, z). Determinare equazioni parametriche per la retta r passante per il punto $P(1, 1, 2)$, parallela al piano π di equazione cartesiana

$$x + 2y + z = 3$$

e incidente la retta s di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$$

Esercizio 2. Sia $RO(O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio euclideo con coordinate associate (x, y, z). Determinare l'equazione cartesiana del piano π passante per la retta s di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$$

ed ortogonale al piano σ di equazione $x - y - z = 3$

Esercizio 3. Spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ con base canonica fissata. Sia $F_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare $\underline{x} \to A\,\underline{x}$ dove

$$A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

Determinare una base per il nucleo e una base per l'immagine.

Esercizio 4. Sia V lo spazio vettoriale reale $\mathcal{V}_O$ con base ortonormale $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ fissata e sia $\underline{w} = \underline{i} - \underline{j} + 2\underline{k}$. Consideriamo l'applicazione lineare $F : \mathcal{V}_O \to \mathcal{V}_O$ definita da $F(\underline{v}) = \underline{w} \wedge \underline{v}$.

4.1. Determinare la matrice associata a F nella base fissata.

4.2. Determinare gli autovalori di F.

4.3. Stabilire se F è diagonalizzabile. Giustificare la risposta.

Esercizio 5. Spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ con base canonica fissata.

5.1. Dimostrare che esiste unica l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che ammette i vettori $\underline{w}_1 = (2, 1)$ e $\underline{w}_2 = (1, 2)$ come autovettori associati agli autovalori $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$ rispettivamente.

5.2. Determinare la matrice associata ad F nella base canonica.

Esercizio 6. Giustificando le risposte, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

6.1. $\det(-A) = -\det A, \quad \forall A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

6.2. $\det(A + B) = \det(A) + \det(B), \quad \forall A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

6.3. $\det(AB) = \det(BA), \quad \forall A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

6.4. $P_A(\lambda) = P_{-A}(\lambda), \quad \forall A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

6.5. Ogni matrice ortogonale è diagonalizzabile.