ALGEBRA 1 — Terzo esame scritto

6 Settembre 2011

(1) Trovare tutte le soluzioni intere $x \in \mathbb{Z}$ del seguente sistema di congruenze lineari:

$$\begin{cases} 2x \equiv 5 \mod 3 \\ 21x \equiv 14 \mod 35 \\ 4x \equiv 12^{12} \mod 14 \end{cases}$$

Qual è la cardinalità dell'insieme delle soluzioni?

(2) Sia $R = M_2(\mathbb{Q})$, l'anello delle matrici 2×2 a coefficienti in $\mathbb{Q}$. Sia I la matrice identità. Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in R$. Si consideri l'insieme $S := \{\alpha A + \beta I \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\}$ che è per definizione uguale a $\left\{ \begin{pmatrix} \beta & 5\alpha \\ 2\alpha & \beta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Q} \right\}$

(a) Verificare che S è un sottoanello di $M_2(\mathbb{Q})$, cioè che è chiuso rispetto a tutte le operazioni;

(b) Stabilire se S è commutativo;

(c) Considerare l'applicazione $\phi : \mathbb{Q}[X] \to M_2(\mathbb{Q})$ che associa a $\sum a_j X^j$ l'elemento $\sum a_j A^j$.

- Verificare che ϕ è un omomorfismo di anelli;
- verificare che ϕ ha immagine uguale a S;
- verificare che il nucleo di ϕ è uguale all'ideale generato da $X^2 - 10$;
- stabilire se S è un campo.

(3) Sia $R = \mathbb{Z}[i]$ e sia I l'ideale generato da $14-7i$ e $35+21i$. Verificare che $\mathbb{Z}[i]/I$ è un campo. *[Potete utilizzare l'informazione che i primi in $\mathbb{Z}$ che sono primi in $\mathbb{Z}[i]$ sono quelli congrui a 3 modulo 4.]*

(4) Sia $M \subset \mathbb{Z}^3$ il sottomodulo generato dagli elementi $(2, -1, 0)$, $(-1, 2, -1)$, $(0, -1, 2)$.

(a) Determinare se lo $\mathbb{Z}$-modulo quoziente $\Gamma = \mathbb{Z}^3/M$ possieda un numero finito di elementi.

(b) È vero che Γ è isomorfo a $\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$?