Geometria 1. a.a. 2019/2020. Prof. Paolo Piazza

Alcune precisazioni sul teorema di dualità negli spazi proiettivi.

Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ e sia $V^\vee$ lo spazio duale associato a V. Sia $S \subset V$ un sottoinsieme di V; definiamo

$$S^\circ := \{L \in V^\vee \mid L(\underline{v}) = 0 \ \forall \underline{v} \in S\}\,.$$

$S^\circ \subset V^\vee$ è detto l'*annullatore* di $S \subset V$. Se R è un sottoinsieme di $V^\vee$ definiamo

$$^\circ R := \{\underline{v} \in V \mid L(\underline{v}) = 0 \mid \forall L \in R\}\,.$$

$^\circ R \subset V$ è detto l'*annullatore* di $R \subset V^\vee$.

Valgono le seguenti proprietà:

(1) $S \subset T \Rightarrow T^\circ \subset S^\circ$.
(2) S° e $^\circ R$ sono sottospazi di $V^\vee$ e V rispettivamente.
(3) $S^\circ = (\mathrm{Span}(S))^\circ$, con $\mathrm{Span}(S)$ il sottospazio generato da S (e cioè l'insieme delle combinazioni lineari finite di elementi di S). Analogamente per $^\circ R$.
(4) Se W_1 e W_2 sono due sottospazi di V allora

$$(W_1 + W_2)^\circ = (W_1)^\circ \cap (W_2)^\circ \quad \text{e} \quad (W_1 \cap W_2)^\circ = (W_1)^\circ + (W_2)^\circ.$$

(5) se W è un sottospazio, allora $^\circ(W^\circ) = W$.
(6) $\dim W^\circ = \dim V - \dim W$.
(7) Sia $R \subset V^\vee$ e sia $R^\circ \subset V^{\vee\vee}$ il suo annullatore nel duale di $V^\vee$ e cioè nel biduale $V^{\vee\vee}$. Se $\beta : V \to V^{\vee\vee}$ denota l'isomorfismo canonico allora $\beta(^\circ R) = R^\circ \subset V^{\vee\vee}$;

Riprendiamo ora da [Sernesi] p. 333, prima del teorema 26.2. La discussione fatta sino a questo punto dimostra che esiste un'applicazione

$$\Sigma : \{\text{ sottospazi di } P(V)\} \longrightarrow \{\text{ sottospazi di } P(V^\vee)\}$$

che associa al sottospazio proiettivo S il sottospazio $\delta^{-1}(\Lambda_1(S))$. Sappiamo che quest'applicazione scambia le inclusioni e manda sottospazi di dimensione k in sottospazi di dimensione $n-k-1$. L'osservazione fondamentale è contenuta nella seguente

Proposizione. Con le notazioni di cui sopra vale quanto segue:

$$\text{se } S = P(W) \text{ allora } \Sigma(S) = P(W^0)\,.$$

Dimostrazione.
Per definizione $W^0 := \{F \in V^\vee \mid F(\underline{w}) = 0 \,\forall \underline{w} \in W\}$.
Facciamo vedere che $P(W^0) \subseteq \Sigma(S)$. Se $[F] \in P(W^0)$ allora $F(\underline{w}) = 0 \ \forall \underline{w} \in W$ e quindi $W \subset \mathrm{Ker}F$; ne segue che $S(= P(W))$ è contenuto nell'iperpiano $P(\mathrm{Ker}F)$ definito da F il che vuol dire, per definizione, che $P(\mathrm{Ker}F) \subset \Lambda_1(S)$ o, equivalentemente, che $[F] \in \delta^{-1}(\Lambda_1(S)) \equiv \Sigma(S)$ che è quello che dovevamo dimostrare.
Facciamo ora vedere che $\Sigma(S) \subseteq P(W^0)$. Se $[F] \in \Sigma(S) = \delta^{-1}(\Lambda_1(S))$, allora, seguendo la dimostrazione dalla Prop. 26.1 di [S] vediamo che $F = \sum \lambda_j F_j$ e quindi $F \in W^0$ dato che ogni addendo appartiene (ovviamente) a W^0. Quindi $[F] \in P(W^\circ)$, come si voleva.
Da $P(W^0) \subseteq \Sigma(S)$ e $\Sigma(S) \subseteq P(W^0)$ segue che $\Sigma(S) = P(W^0)$. La Proposizione è dimostrata.

Conclusione: l'applicazione $\Sigma : \{$ sottospazi di $P(V)\} \longrightarrow \{$ sottospazi di $P(V^\vee)\}$ è indotta dall'applicazione

$$(\ )^0 : \{ \text{ sottospazi di } V\} \longrightarrow \{ \text{ sottospazi di } V^\vee\}$$

che associa a $W \leq V$ il suo annullatore $W^0 \leq V^\vee$. Σ è bigettiva perché ammette un'inversa data da

$$\Sigma^{-1}(P(R)) = P(^\circ R)$$

con R un sottospazio vettoriale di $V^\vee$. Si veda la proprietà (6).
Per quanto richiamato sopra sappiamo che se U e W sono sottospazi di V allora: $U \subset W \Rightarrow W^0 \subset U^0$, $(W \cap U)^0 = W^0 + U^0$, $(W + U)^0 = W^0 \cap U^0$, il che implica che Σ scambia le inclusioni (già lo sapevamo) e scambia *spazio congiungente* con *spazio intersezione*. Un'analoga osservazione vale ovviamente per Σ^{-1}.

Una *proposizione grafica*

$$T(S_{h_1}, \ldots, S_{h_k}; \cup, \cap, \subset, \supset)$$

è una proposizione che coinvolge sottospazi proiettivi di dimensione $h_1, \ldots, h_k$, la nozione di spazio congiungente, di spazio intersezione, di contenere ed di essere contenuto. La proposizione grafica *duale*

$$T^*(S_{n-h_1-1}, \ldots, S_{n-h_k-1}; \cap, \cup, \supset, \subset)$$

è ottenuta scambiando *sottospazi di dimensione* h_j con *sottospazi di dimensione* $n-h_j-1$, *spazi congiungenti* con *spazi intersezione* e *contenere* con *essere contenuto.*

Principio di dualità:
se $T(S_{h_1}, \ldots, S_{h_k}; \cup, \cap, \subset, \supset)$ è una proposizione grafica vera, allora è anche vera la proposizione duale $T^*(S_{n-h_1-1}, \ldots, S_{n-h_k-1}; \cap, \cup, \supset, \subset)$.
Dimostrazione.
Dato che $P(V)$ e $P(V^\vee)$ sono isomorfi, ne segue che se $T(S_{h_1}, \ldots, S_{h_k}; \cup, \cap, \subset, \supset)$ è vera allora è anche vera la proposizione $T(S^\vee_{h_1}, \ldots, S^\vee_{h_k}; \cup, \cap, \subset, \supset)$. Applichiamo ora Σ^{-1} ai sottospazi che intervengono in T; utizzando le proprietà di Σ^{-1} otteniamo che è anche vera

$$T(\Sigma^{-1}(S^\vee_{h_1}), \ldots, \Sigma^{-1}(S^\vee_{h_k}); \cap, \cup, \supset, \subset)\,;$$

ma quest'ultima proposizione è proprio T^*.

Esempio. (Sernesi p. 335.) Sia T la proposizione: *due punti distinti sono congiunti da una retta.* T può essere scritta come segue:
$P \neq Q \Rightarrow L(P, Q) = S_1$
Ora P e Q sono due S_0 (distinti) e $n - 0 - 1 = n - 1$; quindi per individuare la proposizione duale dobbiamo sostituire *punti distinti* con *iperpiani distinti*; poi dobbiamo scambiare *spazio congiungente* di dimensione 1 con *spazio intersezione* di dimensione $n - 1 - 1 = n - 2$; ne segue che la duale di T è:
T^*: *due iperpiani distinti si intersecano in un sottospazio di codimensione 2.*