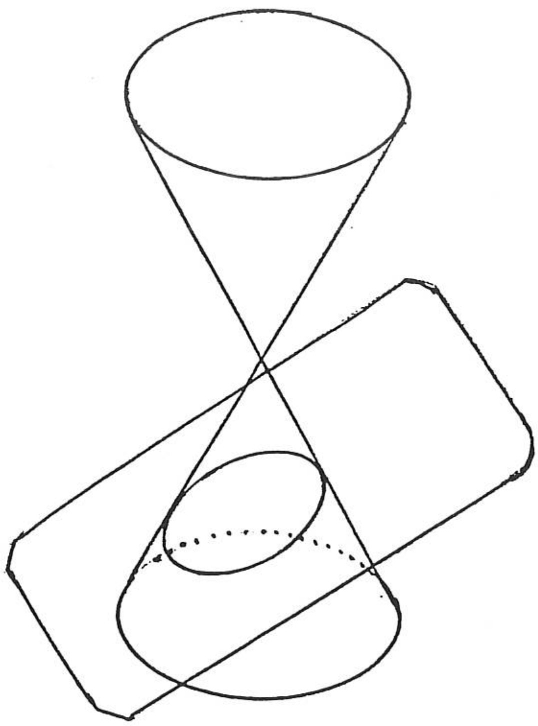
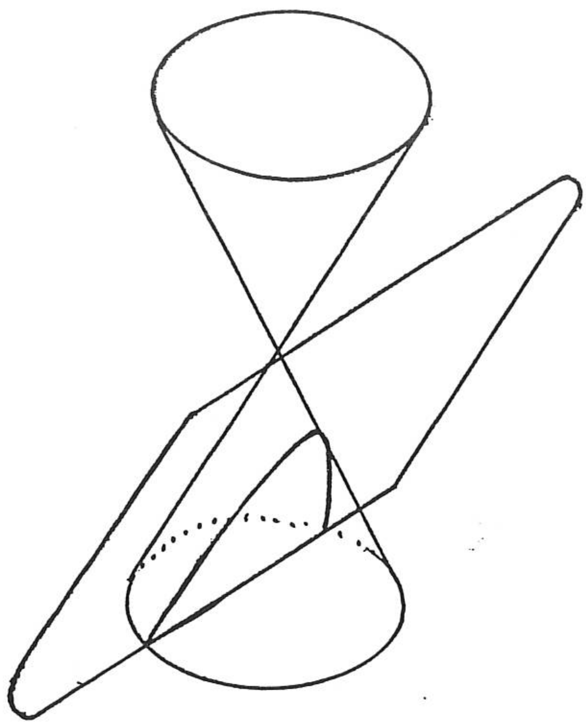
# CAPITOLO XV

## 1. CONICHE

Le coniche sono delle curve che si ottengono intersecando un cono rotondo con un piano. A seconda della reciproca posi= zione del cono e del piano si ottengono coniche di tipo diver= so. Così se il piano interseca il cono in una sola falda la curva ottenuta come intersezione del piano con la falda del cono è quella che si chiama un'ellisse, questo a meno che il piano non risulti parallelo ad una retta contenuta sul cono, poiché, in tal caso, la curva intersezione è una parabola.



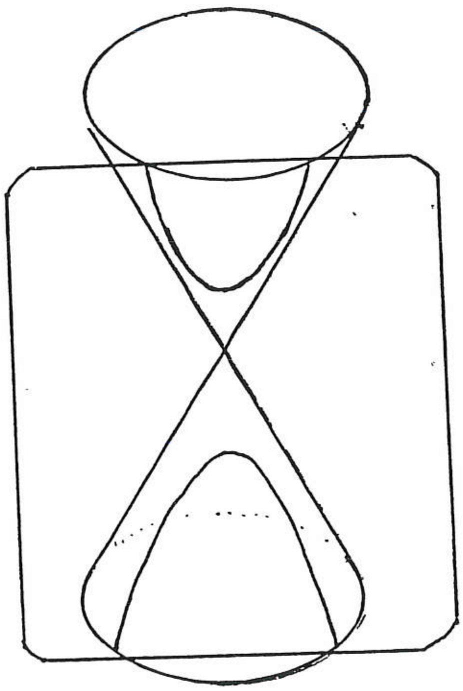
ellisse



parabola

fig. 1

Quando il piano interseca entrambe le falde del cono (ma non ne contiene il vertice) la curva intersezione è un'<u>iperbole</u>.



<u>iperbole</u>

<u>fig. 2</u>

Ellisse, iperbole, parabola sono le tre coniche chiamate <u>coniche generali</u>; a queste vanno aggiunte le cosidette <u>coniche degeneri</u>, costituite di rette, anche esse ottenibili intersecando un cono rotondo con un piano. Precisamente se il piano considerato passa per il vertice può intersecare il cono in due rette distinte, in una sola retta (in tal caso il piano è tangente al cono lungo la retta), ovvero in un solo punto, come è illustrato dalle figure

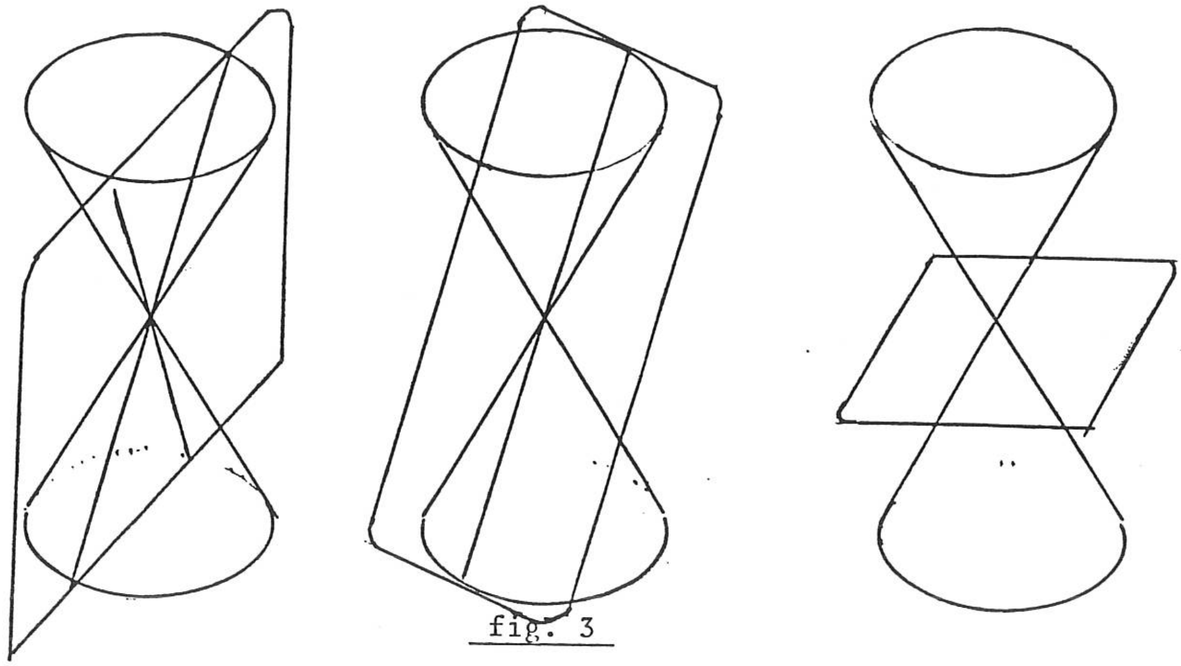


fig. 3

Ci interesseremo nel seguito allo studio delle tre coniche ge= nerali, ellisse, iperbole, parabola, determinandone le equazio= ni a partire da proprietà geometriche che esse possiedono. Si osservi che la circonferenza risulta essere una particolare el= lisse; può infatti ottenersi intersecando il cono rotondo con un piano ortogonale all'asse di rotazione del cono e quindi con un piano che incontra il cono in una sola falda, come avviene appunto per le ellissi.

a) Ellisse

E' noto che tutte le ellissi godono della proprietà seguente, che le caratterizza: le ellissi sono curve luogo di punti del piano la cui somma delle distanze da due punti fissi F, F', detti fuochi, è costante (non si esclude che F ed F' coincida= no; in tal caso, come si vedrà, l'ellisse si riduce ad una cir= conferenza e la costante uguaglia il doppio del raggio).

La caratterizzazione geometrica suddetta delle ellissi permette, come ora ci accingiamo a fare, di calcolare le cosidette equazioni cartesiane (canoniche) dell'ellisse.

Supponiamo assegnata sul piano un'ellisse $\mathcal{E}$ ed indichiamo con F, F' i suoi due fuochi.

Scelta a piacere un'unità di misura, U, per le lunghezze, assumiamo come asse delle x la retta per F, F', orientata nel verso secondo cui F' precede F, ed assumiamo come asse delle y l'asse del segmento FF' orientato a piacere, per modo che il riferimento euclideo così individuato venga ad avere l'origine nel punto di mezzo del segmento FF'.(1)

Il punto F verrà ad avere coordinate (f,o), con $f \geq o$ mentre il punto F' coordinate (-f,o).

Ciò posto sia 2a(a>o) la costante uguale alla somma delle distanze di un qualunque punto P di $\mathcal{E}$ dai suoi due fuochi.

Indicate con (x,y) le coordinate del generico punto P di $\mathcal{E}$ relative al riferimento scelto, avremo

$$2a = d(P,F)+d(P,F') = ((x-f)^2+y^2)^{\frac{1}{2}}+((x+f)^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$$

portando a primo membro il secondo radicale e quadrando

$$4a^2+((x+f)^2+y^2)-4a((x+f)^2+y^2)^{\frac{1}{2}} = ((x-f)^2+y^2)$$

isolando a secondo membro l'unico radicale rimasto e semplificando

$$a^2+fx = a((x+f)^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$$

quadrando ambo i membri

$$a^4+2a^2fx+f^2x^2 = a^2((x+f)^2+y^2)$$

(1) Se F=F' (circonferenze) si prendono come assi x, y due rette qualunque tra loro perpendicolari passanti per F(=F') ed orientate a piacere.

sviluppando ulteriormente

$$a^4+2a^2fx+f^2x^2 = a^2(x^2+2fx+f^2+y^2)$$

semplificando e ordinando

$$(f^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(f^2-a^2)$$

dividendo ambi i membri per $a^2(f^2-a^2)$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{(a^2-f^2)} = 1$$

Ora si ricordi che 2a è la somma delle distanze di un generico punto dell'ellisse dai suoi due fuochi, mentre 2f è la distanza dei due fuochi stessi

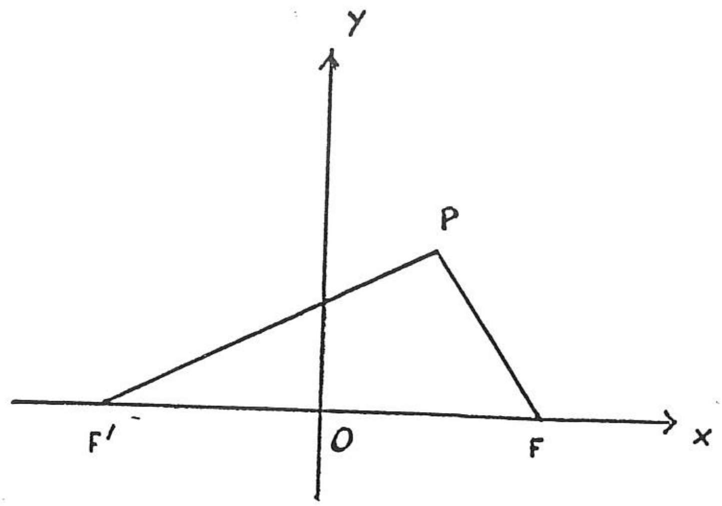



fig. 4

per la disuguaglianza triangolare si conclude che dovrà essere $2f < 2a$ ovvero $f^2 < a^2$ e quindi $a^2-f^2 > 0$. La divisione precedentemente fatta per la quantità $a^2(f^2-a^2)$ è dunque lecita ed in più si può dire che rimane individuato $b > 0$ tale che $b^2 = a^2-f^2$. Fatta questa posizione l'equazione dell'ellisse assegnata, nel rife=

rimento scelto diviene

$$1) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad a,\ b>o$$

La 1) è detta equazione canonica dell'ellisse. L'aggettivo canonica è in relazione al fatto che si tratta dell'equazione dell'ellisse relativamente ad un riferimento che, come si è visto, è stato possibile definire in maniera canonica a partire dall'ellisse assegnata (riferimento canonico associato all'ellisse).

Si noti che se a=b l'equazione 1) diviene

$$x^2+y^2 = a^2$$

che è l'equazione di una circonferenza di centro l'origine e raggio uguale ad a. Ecco che anche dal punto di vista analitico la circonferenza viene a costituire un caso particolare dell'ellisse. Nel caso della circonferenza i suoi due fuochi coincidono naturalmente con il centro della circonferenza infatti $a^2=b^2=a^2-f^2$ e dunque f=o.

Vogliamo effettuare ora uno studio della forma dell'ellisse a partire dalla conoscenza della sua equazione canonica.
A tale scopo ricordiamo che una curva è simmetrica rispetto all'asse delle x se assieme ad un punto P(x,y) contiene anche il punto P'(x,-y). Così la curva sarà detta simmetrica rispetto all'asse delle y se oltre a un punto P(x,y) contiene anche P"(-x,y) e simmetrica rispetto all'origine se con P(x,y) contiene anche P"'(-x,-y). Naturalmente una curva simmetrica rispetto all'asse x e rispetto all'asse y è simmetrica rispetto all'origine, ma non viceversa.

Consideriamo ora il caso dell'ellisse. Supponiamo che un punto $\bar{P}(\bar{x},\bar{y})$ appartenga all'ellisse. Risulterà

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2}+\frac{\bar{y}^2}{b^2}=1$$

Ma allora sarà anche

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2}+\frac{(-\bar{y})^2}{b^2}=1 \quad e \quad \frac{(-\bar{x})^2}{a^2}+\frac{(\bar{y})^2}{b^2}=1 \quad e \quad \frac{(-\bar{x})^2}{a^2}+\frac{(-\bar{y})^2}{b^2}=1$$

Le tre uguaglianze scritte esprimono che anche i punti $(\bar{x},-\bar{y})$, $(-\bar{x},\bar{y})$, $(-\bar{x},-\bar{y})$ sono sull'ellisse. L'ellisse è dunque una cur= va simmetrica rispetto all'asse x, all'asse y, all'origine.

Da ciò si deduce, in particolare, che l'ellisse è ricostrui= bile a partire dalla parte che si trova, ad esempio, nel primo quadrante, ribaltandola prima rispetto all'asse y poi rispetto all'asse x.

Così è possibile limitare lo studio dell'ellisse a quella parte dell'ellisse che è contenuta nel primo quadrante; la par= te restante essendo appunto ottenibile da questa con due succes= sivi ribaltamenti.

Consideriamo la 1) ed esplicitiamola rispetto alla y

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

I punti dell'ellisse contenuti nel I quadrante avranno la x e la y positive o nulle ed andranno quindi cercati tra quelli la cui x e la cui y verificano la

$$\boxed{2) \qquad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \qquad x \geq 0}$$

Ora la 2) è definita solo se $a^2-x^2 \geq 0$ cioé, visto che supponia=

mo $x \geq o$, solo se $x \leq a$. I punti dell'ellisse appartenenti al primo quadrante sono perciò contenuti nella striscia di detto quadrante delimitata dall'asse y,x=o, e dalla retta x = a Inoltre visto che per $o \leq x \leq a$ la funzione 2) assume il suo massimo valore in x=o, valendo b, possiamo anche asserire che la parte dell'ellisse appartenente al primo quadrante è anche contenuta nella striscia compresa tra l'asse x e la retta y=b.

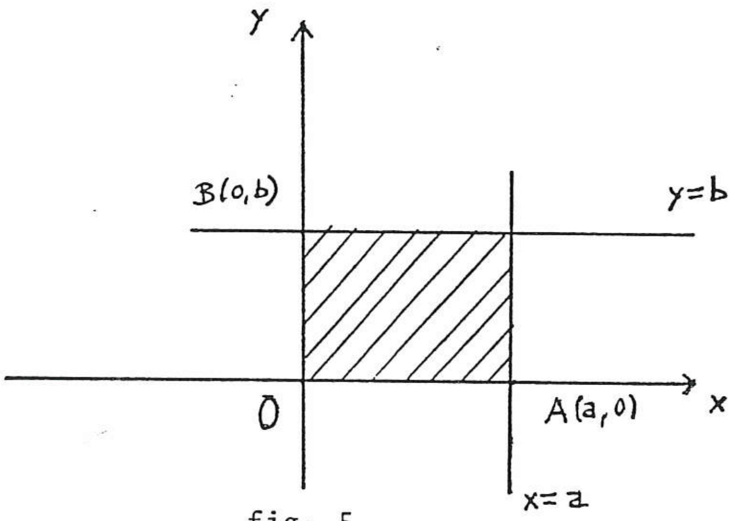



fig. 5

Per x=o si è visto che y=b, mentre per x=a, y=o; si hanno così i due punti B(o,b) ed A(a,o) intersezioni, dell'ellisse rispettivamente con gli assi y ed x.

Nell'interno dell'intervallo $[o,a]$ la funzione 2) é poi evidentemente decrescente, come si può osservare, elementarmente, notando che al crescere di x tra o ed a la quantità $a^2-x^2$ decresce. Con ulteriori ragionamenti è poi possibile dimostrare che l'ellisse è convessa, ovvero decresce mantenendo però la propria concavità sempre rivolta verso il basso.

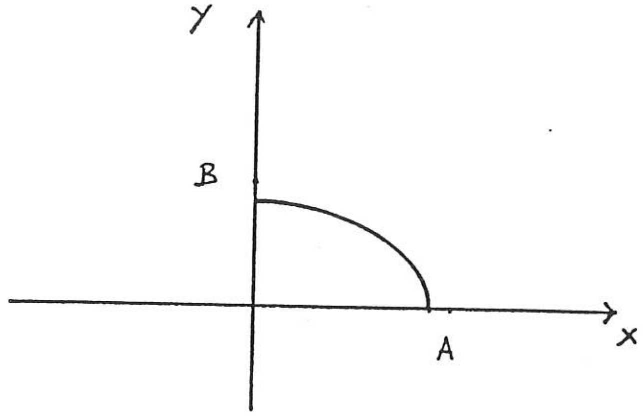



fig. 6

A questo punto effettuando successivamente i due ribaltamenti precedentemente indicati, attorno all'asse x ed all'asse y si ottiene la figura

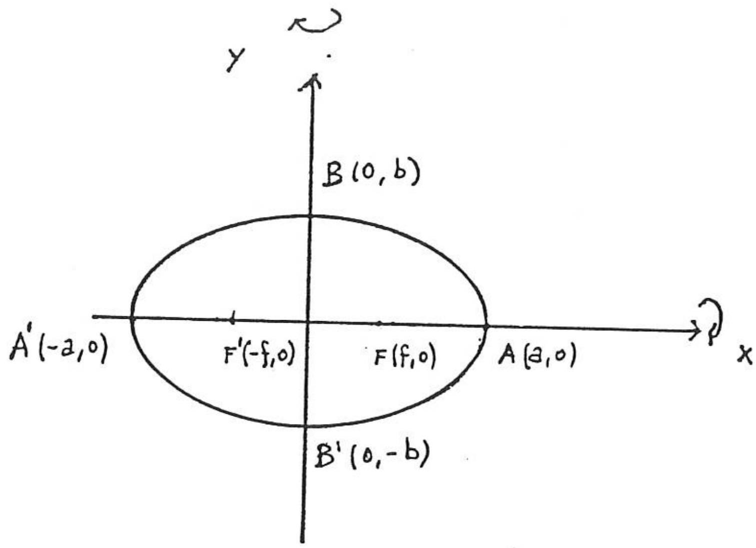



fig. 7

I punti A,A',B,B' intersezioni dell'ellisse con gli assi sono detti vertici dell'ellisse. Il segmento AA' è detto asse maggiore, il segmento BB' è detto asse minore; il segmento AA' è detto maggiore in quanto la sua lunghezza, 2a, è maggiore della lunghezza, 2b, del segmento BB' in quanto dalla posizione fatta $b^2=a^2-f^2$ si deduce (salvo il caso della circonferenza f=o e b=a) $2a > 2b$; l'asse maggiore è perciò quello dei due assi che contiene i due fuochi.

Dalla 2) si possono ricavare delle semplici equazioni parametriche per l'arco di ellisse contenuto nel primo quadrante, semplicemente ponendo x=t

$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-t^2} \end{cases} \qquad o \leq t \leq a$$

Ma delle equazioni parametriche più interessanti e valide per tutta l'ellisse si ottengono osservando che dalla 1) si deduce che per un punto P(x,y) dell'ellisse risulta sempre $x^2/a^2 \leq 1$ e si può quindi porre $x/a = \cos\varphi$ ovvero

3) $$x = a\cos\varphi \qquad -\pi < \varphi \leq \pi$$

con $\varphi$ angolo opportuno ma individuato solo a meno del segno. Se ora si osserva che risulta anche $y/b = \pm\sqrt{1-x^2/a^2}$ e quindi per la 3) si ha $y = \pm b\sqrt{1-\cos^2\varphi}$ , si può quindi determinare anche il segno di $\varphi$ imponendogli di soddisfare oltre alla 3) anche alla

4) $$y = b\sin\varphi \qquad -\pi < \varphi \leq \pi$$

Così dalle 3), 4), si ottengono le equazioni parametriche cercate

5) $$\boxed{\begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = b\sin\varphi \end{cases}}$$

valide per tutta l'ellisse.

Le 5) si prestano ad essere interpretate geometricamente. Infatti da esse appare che la x di un punto dell'ellisse dovendo essere uguale ad a $\cos\varphi$ uguaglierà la x del punto della circonferenza centrata nell'origine di raggio a corrispondente all'angolo $\varphi$ , mentre la y dello stesso punto dell'ellisse uguaglierà la y del punto della circonferenza centrata nell'origine di raggio b corrispondente allo stesso angolo $\varphi$ :

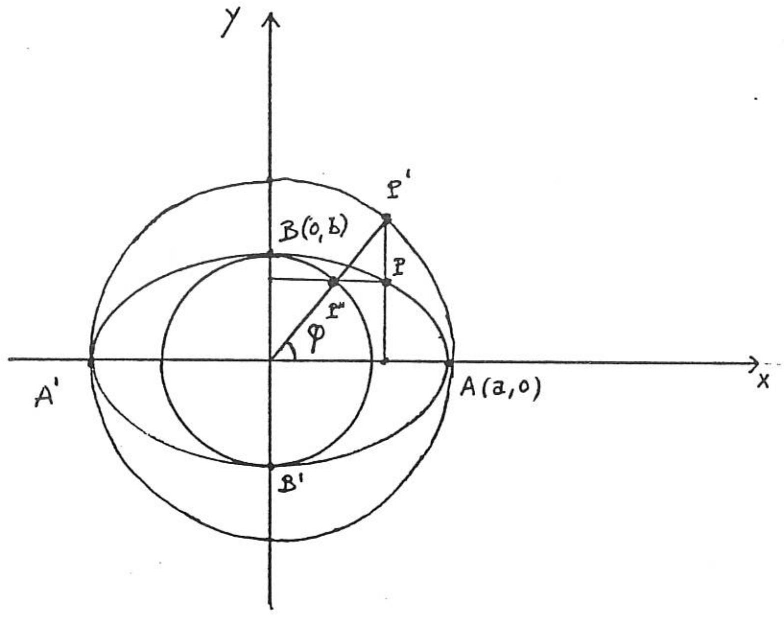



fig. 8

Esiste un'altra caratterizzazione geometrica dell'ellisse: l'ellisse risulta essere il luogo dei punti il cui rapporto tra la distanza da un punto assegnato (fuoco) ed una retta assegnata (direttrice) è costante positivo e minore di 1. Tale costante, indicata con e, viene detta eccentricità. Avvertiamo però che rimangono escluse da tale caratterizzazione le circon=

ferenze.

Supponiamo fissata una retta d un punto F un numero $o < e < 1$. Scegliamo come riferimento quello avente come asse delle x la retta per F perpendicolare a d, e come asse delle y prendiamo provvisoriamente una qualunque retta perpendicolare all'asse scelto della x, e quindi parallela a d, ma non passante per F. Detta O l'intersezione dei due assi si prenda come verso sull'asse x quello secondo cui O precede F; per modo che risulti F(f,o) con $f > o$. Sull'asse y si scelga un verso ad arbitrio.

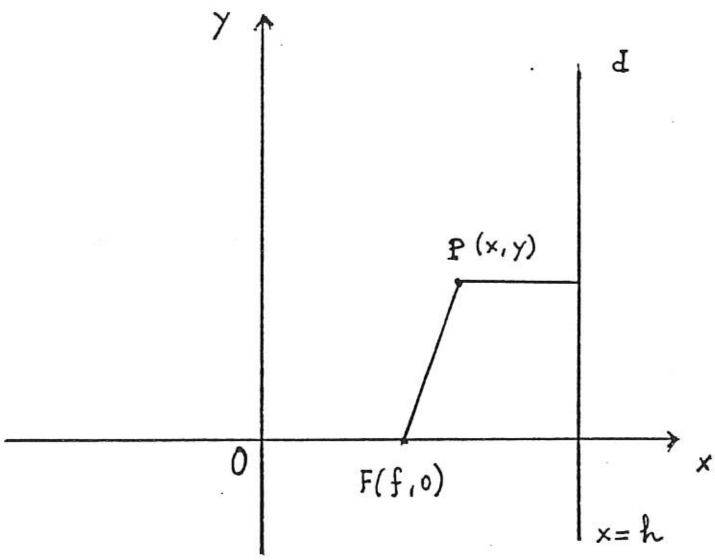



fig. 9

Sia x=h l'equazione di d.

Veniamo al calcolo delle equazioni dell'ellisse

$$\frac{d(P,F)}{d(P,d)} = \frac{\sqrt{(x-f)^2+y^2}}{|x-h|} = e$$

Portando a secondo membro il denominatore, quadrando e sviluppando abbiamo

$$x^2+f^2-2fx+y^2 = e^2(x^2+h^2-2hx)$$

ovvero

6) $$(1-e^2)\,x^2 + y^2 - 2(f-e^2h)x+f^2 - e^2h^2 = 0$$

A questo punto si può osservare che l'asse y, provvisoriamente scelto in posizione generica, può essere fissato in modo che il coefficiente della x, nell'equazione 6), si annulli cioè risulti

7) $$f - e^2h = 0 \qquad \text{ovvero} \quad e^2 = \frac{f}{h}$$

Infatti sino a che non si fissa l'asse y non rimarranno individuati né f né h bensì solo il valore assoluto della loro differenza, h-f, che rappresenta la distanza del fuoco dalla direttrice; ponendo allora $l$ = h-f, risulterà h=f+l, che sostituita nella 7) dà,

8) $$f - e^2(f+l) = 0 \quad \text{cioè} \quad f = \frac{e^2}{1-e^2}$$

Pertanto scegliendo l'asse delle y in modo che l'ascissa f del fuoco verifichi la 8) si ottiene un riferimento nel quale la 6) si riduce alla

$$(1-e^2)\,x^2 + y^2 = e^2h^2 - f^2$$

da questa, dividendo ambo i membri per il secondo membro si ottiene

9) $$\frac{x^2}{\dfrac{e^2h^2-f^2}{1-e^2}} + \frac{y^2}{e^2h^2-f^2} = 1$$

Si noti ora che, poiché $f > 0$ ed $e < 1$, le 8) ci assicurano che $l > 0$ e dunque che $h = f+l > f$; ciò, unitamente alla 7) porta a concludere che tanto $e^2h^2 - f^2 > 0$ quanto $1-e^2 > 0$, per modo che ha senso porre nella 9)

$$10) \qquad a^2 = \frac{e^2h^2 - f^2}{1 - e^2} \qquad b^2 = e^2h^2 - f^2$$

ottenendo così l'equazione canonica dell'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Semplici conti mostrano che

$$11) \qquad a^2 - b^2 = f^2 \qquad e = \frac{f}{a} \qquad h = \frac{a}{e}$$

Le 11) unitamente alle 7) forniscono utili relazioni tra i coefficenti a e b dell'equazione dell'ellisse, l'eccentricità e di questa, la coordinata f del suo fuoco, l'ascissa h dei punti della relativa direttrice.

Segnaliamo che, se si considera l'altro fuoco dell'ellisse quello di coordinate $(-f\ ,0)$, allora la retta $x=-a^2/(-f\ )=a^2/f$ viene ad essere la direttrice relativa a questo fuoco nel senso che l'ellisse risulta essere ancora il luogo dei punti il cui rapporto delle distanze da quest'ultimo fuoco e dalla sua direttrice vale l'eccentricità fissata e $(<1)$.

b) Iperbole.

Lo studio dell'iperbole è del tutto analogo a quello fatto per l'ellisse, per tale motivo ci limiteremo, nella maggioranza dei casi, a tralasciare le dimostrazioni di quanto enunciato lasciandole come esercizi.

Cominciamo con l'enunciare una proprietà geometrica caratteristica dell'iperbole.

L'iperbole è il luogo dei punti per i quali è costante (e non nullo) il valore assoluto della differenza delle distanze da due punti fissi, distinti, detti fuochi.

Siano F, F' i due fuochi dell'iperbole, $2a(a>0)$ la costante del precedente enunciato. Si prenda come asse delle x quello individuato dai due punti F, F' e lo si orienti in modo che F' venga a precedere F; come asse delle y si prenda l'asse del segmento F,F' e lo si orienti a piacere. I punti F,F' verranno ad avere coordinate $F(f,0)$, $F'(-f,0)$. Ragionando come per l'ellisse si troverà come equazione dell'iperbole la seguente

$$\boxed{12)\qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad a,\ b>0}$$

dove $b^2 = f^2-a^2$. Sempre procedendo in maniera analoga a come proceduto per l'ellisse si trova per l'iperbole la forma seguente

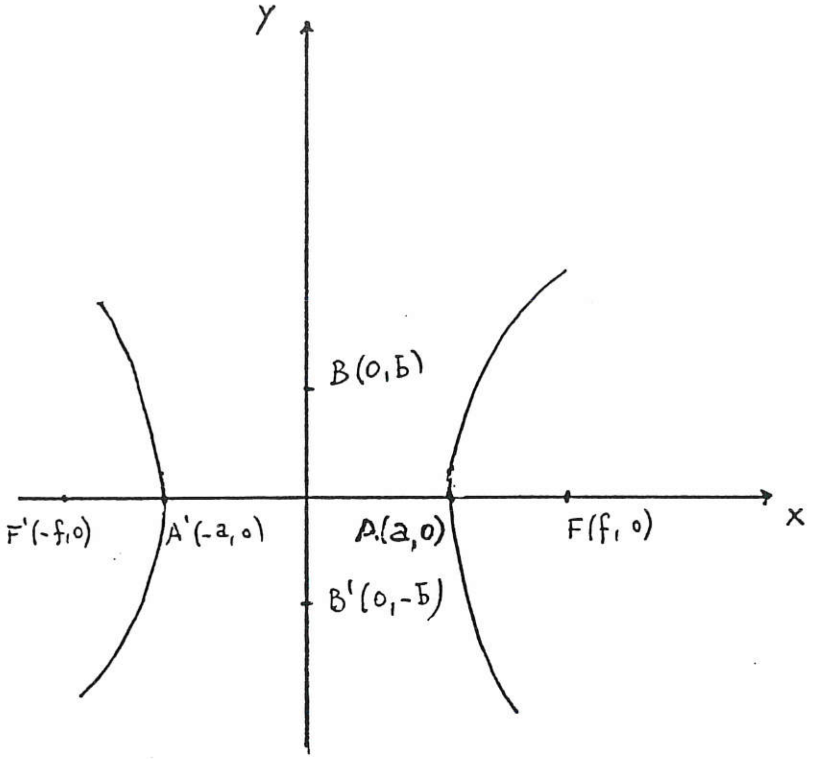



fig. 10

in particolare si osserva che nella striscia del piano delimitata dalle rette x=-a, x=a non cadono punti dell'iperbole, che l'asse delle x interseca l'iperbole nei punti A(a,0), A'(-a,0) detti vertici dell'iperbole, mentre l'asse delle y non ha punti in comune con l'iperbole. Per tale motivo l'asse delle x è detto <u>asse traverso</u> mentre l'asse delle y è detto <u>asse non traverso</u>.

Passiamo ad un'altra caratterizzazione geometrica dell'iperbole, analoga a quella dell'ellisse; <u>l'iperbole è il luogo dei punti il cui rapporto delle distanze da un punto fissato F, detto fuoco, e da una retta fissata d, detta direttrice, è costante e maggiore di 1; tale costante è detta eccentricità dell'iperbole</u>.

Il risultato si trova procedendo in maniera analoga a come proceduto per l'ellisse; e sempre analogamente a come proceduto per l'ellisse si determinano anche per l'iperbole le relazioni 11), nelle quali la prima va sostituita con la

13) $$a^2+b^2 = f^2$$

c) Parabola

Anche la parabola può essere ritrovata a partire da una sua proprietà geometrica infatti la parabola risulta essere il luogo dei punti il cui rapporto delle distanze da un punto fissato F (fuoco) e da una retta fissata d (direttrice) è constantemente uguale a 1 (eccentricità e=1).

Sempre procedendo come per l'ellisse si trova per la parabola in un primo tempo l'equazione 6), la quale tenuto conto che $e = 1$ si riduce alla:

$$y^2 = 2(f-h)x+h^2-f^2$$

scegliendo allora l'asse delle y in modo che risulti $f=-h$, ovvero facendo passare l'asse y nel punto di mezzo tra F e l'intersezione tra la direttrice e l'asse x, l'equazione della parabola diventa

14) $$y^2 = 4f\,x$$

equazioni che risultano così espresse tramite l'ascissa f del fuoco F della parabola.

Dalla 14), con uno studio analogo a quello fatto per l'ellis= se e l'iperbole, si perviene a stabilire che la parabola ha la forma

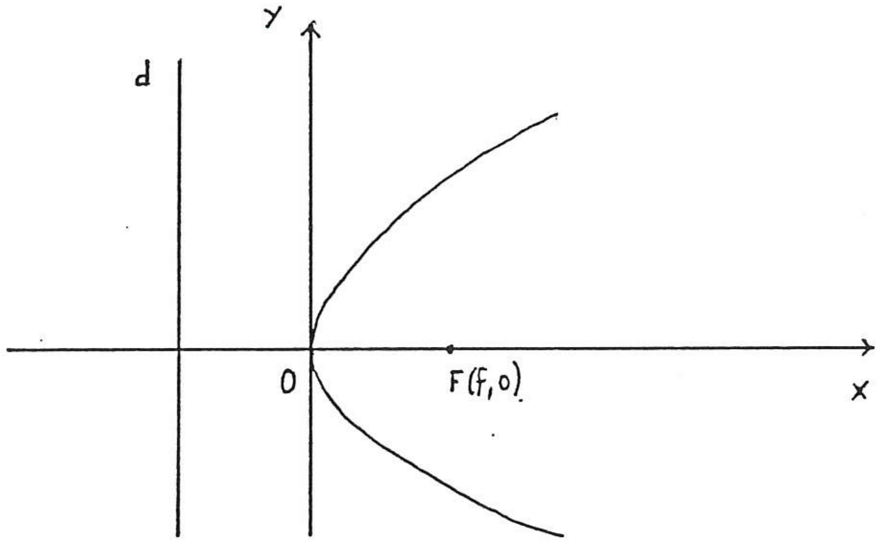



fig. 11

d) Equazione polare delle coniche

Abbiamo visto che le tre coniche, ellissi (escluse le circonfe= renze), iperboli, parabole, possono caratterizzarsi geometrica= mente con la proprietà:

L'ellisse, l'iperbole, parabola sono il luogo dei punti il cui rapporto delle distanze da un punto fissato F, detto fuoco, da una retta scelta d, direttrice, è costante, non nulla, e risulta rispettivamente essere minore, maggiore, uguale a uno.

Tale costante si indica con, e, e viene detta eccentricità della conica.

A partire da questa proprietà geometrica valida per tutte e tre le coniche generali, facendo uso di coordinate polari, si può trovare una equazione unica per tutte e tre le coniche, a differenza di quanto avviene facendo uso di coordinate carte= siane, nel qual caso le equazioni per le coniche risultano es= sere distinte.

Vediamo come si procede.

Fissato il fuoco F e la rispettiva direttrice d si scelga come origine O del riferimento polare il fuoco F, come asse po= lare, a, la retta uscente da F perpendicolare a d orientata da F a d, come verso di rotazione del piano, uno qualunque dei due versi possibili.

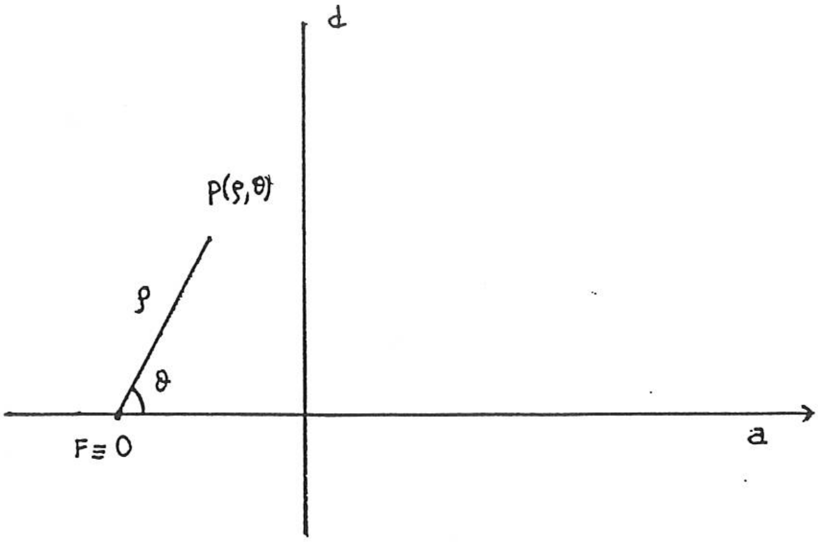



Fig. 12

Ad ogni punto P potranno farsi corrispondere 2 coordinate: $\rho$, quantità positiva, esprimente la distanza di P da O; $\vartheta \in [0, 2\pi[$ esprimente la misura in radianti dell'angolo di cui deve ruo=

tare l'asse polare a, secondo il verso positivo di rotazione fissato nel piano, per andare a sovrapporsi alla semiretta OP. (Coordinate polari non generalizzate).

Detto H il piede della perpendicolare abbassata da un generico punto P della conica sulla direttrice d, risulta

15) $$\rho = d(P,F) = e\ d(P,d) = e\ d(P,H) = e\ \overline{PH}$$

Indichiamo con K l'intersezione di d con l'asse polare a

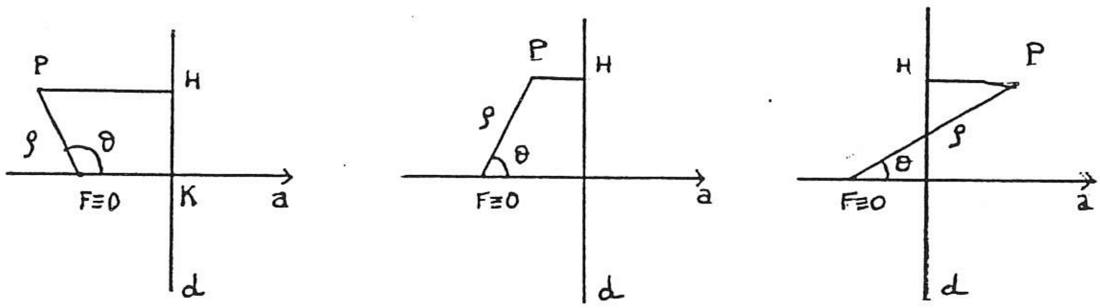



fig. 13

Risulterà allora (vedi i tre casi della figura precedente)

16) $$\overline{PH} = \pm\ \overline{FK} \mp \rho \cos\theta$$

dove i segni superiori sono da prendersi quando P è contenuto in quel semipiano, dei due individuati da d, contenente F, mentre i segni inferiori vanno presi nel caso opposto.

Sostituendo la 16) nella 15) e posto $\overline{FK}=k$, si ha

$$\rho = e\,(\pm k \mp \rho\cos\theta) \qquad \text{ovvero} \qquad \rho = \frac{\pm\, e\, k}{1 \pm e\cos\theta}$$

ponendo ora $p = ek$ otteniamo la formula cercata

$$\boxed{\text{17)} \qquad \rho = \frac{\pm p}{1 \pm e \cos\vartheta}}$$

detta equazione polare delle coniche. Precisiamo che la 17) non consiste in realtà di una sola equazione ma di due equazioni: una corrispondente alla scelta dei segni + e rappresentativa dei punti della conica appartenenti al semipiano delimitato da d e contenente F = 0; l'altra, corrispondente alla scelta dei segni − e rappresentativa dei punti della conica appartenenti all'altro semipiano. Vi è però anche da notare che solo l'iperbole ha punti tanto in un semipiano quanto nell'altro, e quindi solo nel caso dell'iperbole ha interesse considerare tutte e due le equazioni 17). Vi è comunque un metodo per unificare anche nel caso dell'iperbole le due equazioni 17) in una sola; tale metodo consiste nell'usare coordinate polari generalizzate; secondo tali coordinate ad un dato punto del piano P non si associa una sola coppia $(\rho, \vartheta)$ di numeri reali definita come sopra, ma oltre a questa le infinite coppie del tipo $(\rho, \vartheta+2k\pi)$ e $(-\rho, \vartheta+2(k+1)\pi)$ (k intero). Se si fa questa ammissione un punto $P_0$ le cui coordinate polari $(\rho_0, \vartheta_0)$ verificano la 17) con i segni −

$$\text{18)} \qquad \rho_0 = \frac{p}{-1+e\cos\vartheta_0}$$

viene ad avere tra le sue coordinate polari generalizzate anche la coppia $(-\rho_0, \vartheta_0+\pi)$ e per questa risulta, tenuto conto della 18)

$$-\rho_0 = -\frac{p}{-1+e\cos\vartheta_0} = \frac{p}{1-e\cos\vartheta_0} = \frac{p}{1+e\cos(\vartheta_0+\pi)}$$

cioè se la coppia $(\rho_0, \vartheta_0)$ verifica la $\rho = \dfrac{p}{-1+e\cos\vartheta}$, allora la coppia $(-\rho_0, \vartheta_0+\pi)$, rappresentativa dello stesso punto rappresentato dalla coppia $(\rho_0, \vartheta_0)$, verifica l'equazione $\rho = \dfrac{p}{1+e\cos\vartheta}$;

quindi facendo uso di coordinate polari generalizzate la sola equazione

$$19)\qquad \rho = \frac{p}{1+e\cos\vartheta}$$

rappresenta tutta la conica anche nel caso della iperbole. Osserviamo come ultima cosa che mentre per determinare la 19) si è esclusa la circonferenza in quanto questa non rientra nella caratterizzazione geometrica che ci ha portati appunto alla 19), a conti fatti si vede che la 19) dà le equazioni di una circon= ferenza di centro O e raggio p $\underbrace{\text{quando si}}_{\text{in essa}}$ ponga e=0 (caso sino ad ora escluso). Per questo si dice anche che la circonferenza è una ellisse con eccentricità nulla.

## 2. QUADRICHE

Le quadriche sono superfici che, come apparirà dallo studio che ne faremo, presentano molte analogie con le coniche. Ci limitere= mo a fare uno studio delle quadriche generali, ellissoide, iper= boloidi, paraboloidi, a partire dalle loro equazioni canoniche.

a) Ellissoide

Fissato un riferimento cartesiano euclideo nello spazio, le equazioni

$$\boxed{20)\qquad \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1 \qquad\qquad \alpha,\beta,\gamma>0}$$

sono le equazioni canoniche dell'ellissoide. Vogliamo studiare la forma dell'ellissoide a partire dalla 20). A tale scopo comin= ciamo con il ricordare che una superficie $\Sigma$ è simmetrica rispet= to a un punto, una retta, un piano se assieme ad ogni suo punto contiene il simmetrico di questo rispetto al punto, alla retta, al piano.

Così una superficie $\Sigma$ è simmetrica rispetto all'origine se assieme ad ogni suo punto P(x,y,z) contiene anche il simmetrico di questo rispetto all'origine cioé il punto P'(-x,-y,-z). Analogamente $\Sigma$ sarà simmetrica rispetto all'asse delle x se assieme a P(x,y,z) contiene il simmetrico di P rispetto all'asse x cioé il punto P'(x,-y,-z). La superficie $\Sigma$ sarà simmetrica rispetto al piano x,y se assieme a P(x,y,z) contiene P'(x,y,-z) che è il simmetrico di P rispetto al piano x,y. E analogamente per quanto riguarda le simmetrie relative agli altri assi e piani coordinati. Ciò posto il fatto che le variabili x,y,z compaiono nella 20) tutte al secondo grado garantisce che l'ellissoide è simmetrico rispetto a tutti i piani e gli assi coordinati e rispetto all'origine.

Proseguiamo lo studio dell'ellissoide determinando le intersezioni di questo con gli assi coordinati. Tali intersezioni si trovano facendo successivamente sistema tra la 20) e le equazioni y=z=0 (intersezioni con l'asse x) x=y=0 (intersezioni con l'asse y) x=y=0 (intersezioni con l'asse z). Si vede così che l'ellissoide interseca l'asse delle x nei punti $A(\alpha,0,0)$, $A'(-\alpha,0,0)$; l'asse delle y nei punti $B(0,\beta,0)$, $B'(0,-\beta,0)$, l'asse delle z nei punti $C(0,0,\gamma)$, $C'(0,0,-\gamma)$ (vertici dell'ellissoide)

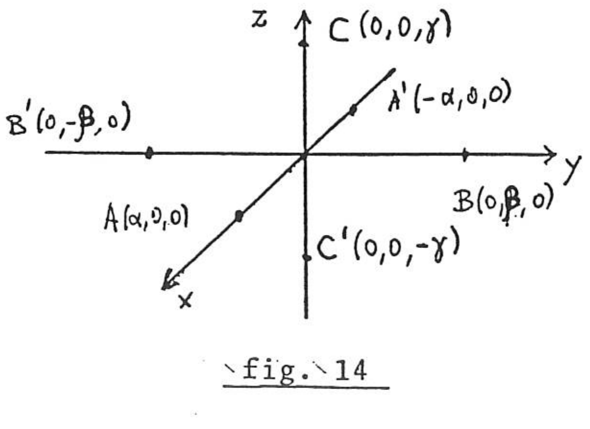



fig. 14

Le intersezioni con i piani coordinati, xy, xz, yz sono invece date rispettivamente dai sistemi

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}+\dfrac{z^2}{\gamma^2}=1 \\ z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}+\dfrac{z^2}{\gamma^2}=1 \\ y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}+\dfrac{z^2}{\gamma^2}=1 \\ x=0 \end{cases}$$

equivalenti ai sistemi

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1 \\ z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{z^2}{\gamma^2}=1 \\ y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{y^2}{\beta^2}+\dfrac{z^2}{\gamma^2}=1 \\ x=0 \end{cases}$$

e rappresentativi di tre ellissi appartenente al piano x,y la prima e con semiassi $\alpha$, $\beta$, al piano x,z la seconda con semiassi $\alpha$, $\gamma$, al piano y,z la terza e con semiassi $\beta$, $\gamma$.

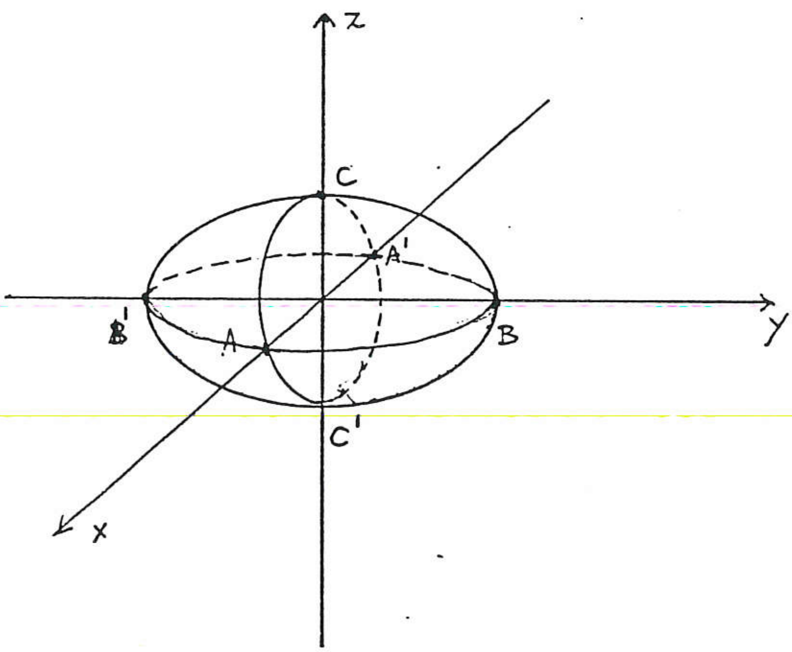



fig. 15

Analizziamo ora le sezioni con i piani paralleli al piano x,y. Tali sezioni sono date, al variare di k, dalle seguenti equazioni

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} + \dfrac{z^2}{\gamma^2} = 1 \\ z = k \end{cases}$$

equivalenti alle

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1-\dfrac{k^2}{\gamma^2} \\ z = k \end{cases}$$

Effettuando la traslazione del piano xy, che porta questo sul piano z=k e che induce le seguenti formule di cambiamento di coordinate: $x'=x, y'=y, z'=z-k$ le equazioni scritte divengono

$$\begin{cases} \dfrac{(x')^2}{\alpha^2} + \dfrac{(y')^2}{\beta^2} = 1-\dfrac{k^2}{\gamma^2} \\ z' = 0 \end{cases}$$

dalle quali appare che la sezione dell'ellissoide con il piano z=k è un'ellisse, per $1-k^2/\gamma^2 > 0$ ovvero per $-\gamma < k < \gamma$, avente semiassi $\alpha\sqrt{1-\frac{k^2}{\gamma^2}}$, $\beta\sqrt{1-\frac{k^2}{\gamma^2}}$, quindi assi che decrescono per k che varia, in valore assoluto, da zero a $\gamma$; le sezioni dell'ellissoide con i due piani $z=\gamma$ e $z=-\gamma$ sono rispettivamente i punti di coordinate $(0,0,\gamma)$ e $(0,0,-\gamma)$.

Notiamo che se $\alpha=\beta$ qualunque sia k compreso tra $-\gamma$ e $\gamma$ la sezione dell'ellissoide con il piano z=k è una circonferenza di raggio $\alpha\sqrt{1-\frac{k^2}{\gamma^2}}$ e di centro il punto (0,0,k), cioé avente sempre centro sull'asse delle z. Se allora prendiamo la sezione dell'ellissoide, ad esempio, con il piano yz, cioé l'ellisse di equazioni

21) $$\begin{cases} \dfrac{y^2}{\beta^2} + \dfrac{z^2}{\gamma^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

ogni punto di questa ellisse apparterrà anche ad una delle circonferenze ottenute come intersezione dell'ellissoide con i piani paralleli al piano x,y; pertanto, dato che come si é visto tali circonferenze sono tutte centrate sull'asse delle z, immaginando di far ruotare l'ellisse attorno all'asse z ogni punto descriverà la circonferenza alla quale appartiene e così l'ellisse ruotando descriverà tutto l'ellissoide.
Nell'ipotesi fatta possiamo dire allora che l'ellissoide è ottenuto ruotando l'ellisse 21) attorno all'asse z ed è quindi una superficie di rotazione attorno all'asse z

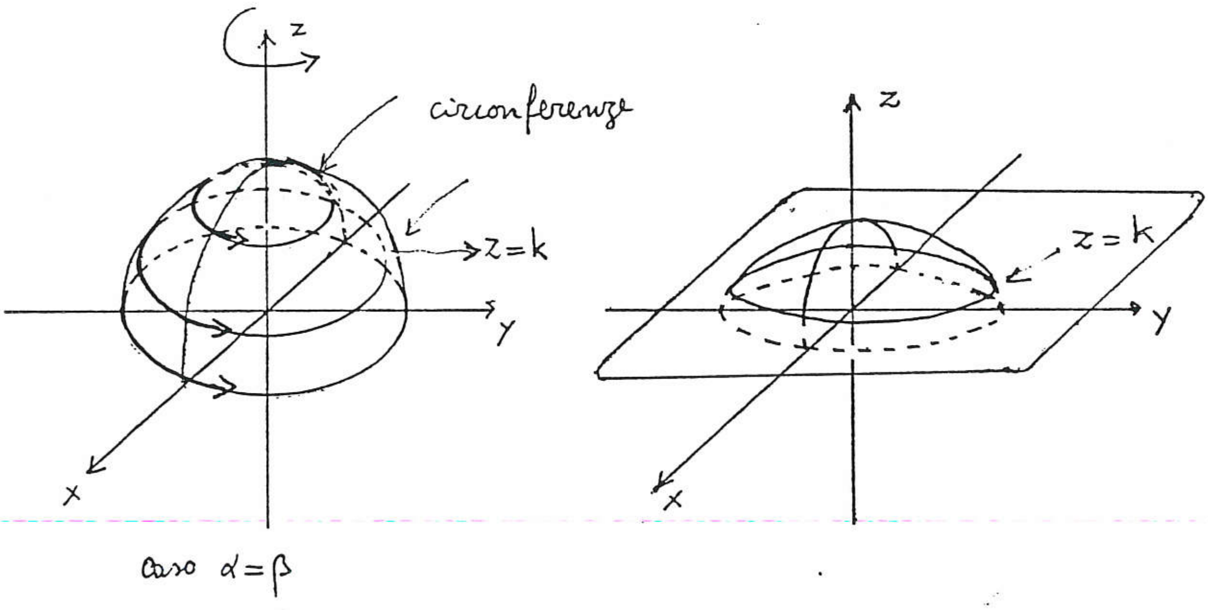



fig. 16

Tutto quanto detto a partire dal piano xy può naturalmente ripetersi in maniera analoga a partire dai piani xz e yz.

b) Iperboloide ellittico.

I punti di coordinate le soluzioni dell'equazione

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1 \qquad \alpha, \beta, \gamma > 0$$

costituiscono la quadrica chiamata iperboloide ellittico, o anche, iperboloide a due falde. Questo secondo nome deriva dal fatto che, come vedremo tra poco, mentre non cadono punti del= l'iperboloide all'interno della striscia di spazio delimitata dai due piani $x=\alpha$ e $x=-\alpha$, ne cadono al di fuori di questa striscia: l'iperboloide ellittico viene così ad essere costi= tuito di due falde staccate. Ma passiamo allo studio dell'iper= boloide seguendo l'ordine tracciato nello studio dell'ellissoide.

Innanzi tutto appare chiaro che anche l'iperboloide risulta simmetrico rispetto a tutti i piani e gli assi coordinati e ri= spetto all'origine. In secondo luogo le intersezioni con gli as= si coordinati sono date dai sistemi

$$\begin{cases} \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

dai quali appare che il primo sistema e il secondo, fornenti ri= spettivamente le intersezioni con l'asse z e con l'asse y, non ammettono soluzioni e quindi detti assi non intersecano l'iper= boloide; il terzo sistema ammette invece le due soluzioni $(\alpha,0,0)$ e $(-\alpha,0,0)$ e dunque l'asse x interseca l'iperboloide in due pun= ti diciamoli A e A'.

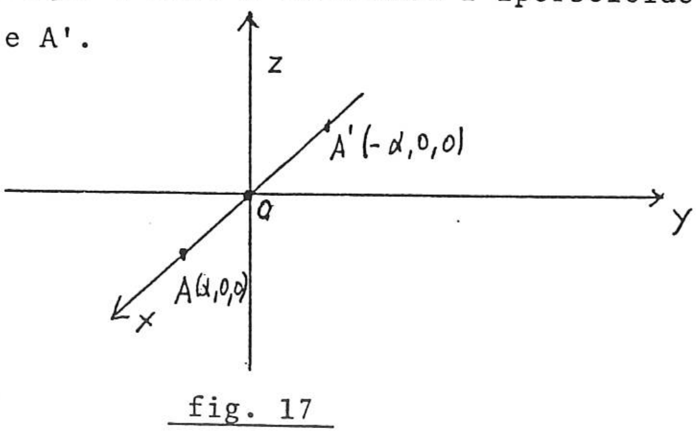



fig. 17

Per quanto riguarda le intersezioni con i piani coordinati xy, xz,yz, esse sono rispettivamente date dai sistemi

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} - \dfrac{z^2}{\gamma^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} - \dfrac{z^2}{\gamma^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} - \dfrac{z^2}{\gamma^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Ora per quanto riguarda il primo sistema esso equivale a considerare sul piano z=0 (piano xy) l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ che ha pertanto come asse traverso l'asse delle x e come vertici i punti $A(\alpha,0,0)$, $A'(-\alpha,0,0)$; il secondo sistema rappresenta l'iperbole del piano y=0 (piano xz) di equazioni $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=1$ ed avente anch'essa pertanto come asse traverso l'asse x, come vertici ancora i punti A e A'.

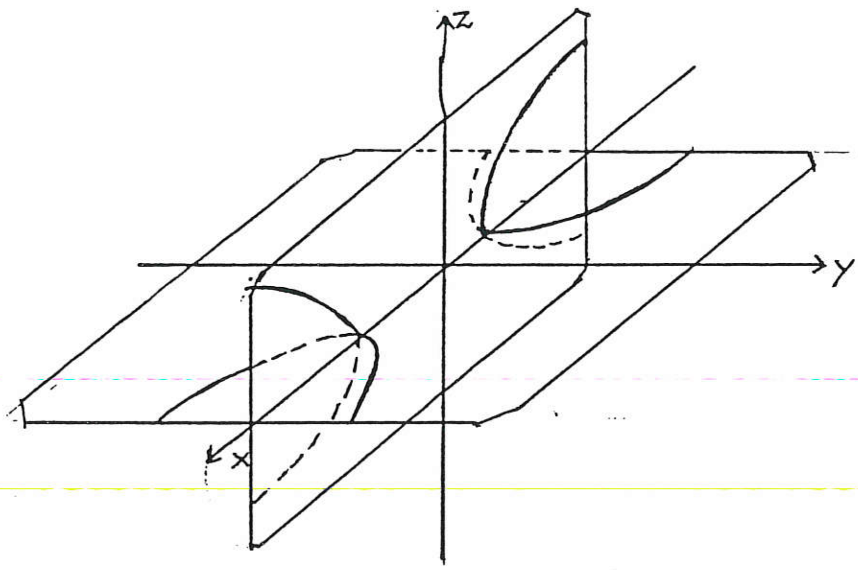



fig. 18

Infine è subito visto che il terzo sistema non ammette soluzioni: il piano yz non interseca l'iperboloide.

Rimangono da studiare le sezioni con i piani paralleli ai piani coordinati. Cominciamo con quelle parallele al piano xy e che sono date al variare di k dal sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} - \dfrac{z^2}{\gamma^2} = 1 \\ z = k \end{cases}$$

equivalente al sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1 + \dfrac{k^2}{\gamma^2} \\ z = k \end{cases}$$

Effettuando il cambiamento di coordinate: $x'=x, y'=y, z'=z-k$ e che corrisponde ad una traslazione degli assi che porta il piano xy a sovrapporsi al piano $z=k$, si ottiene

$$\begin{cases} \dfrac{(x')^2}{\alpha^2} - \dfrac{(y')^2}{\beta^2} = 1 + \dfrac{k^2}{\gamma^2} \\ z' = 0 \end{cases}$$

che rappresenta evidentemente, qualunque k, una iperbole appar= tenente al piano $z'=0$, ovvero al piano $z=k$, ed avente asse tra= sverso l'asse $x'$, ovvero l'asse di equazioni nel vecchio riferi= mento $y=0$, $z=k$.

In maniera analoga si stabilisce che le sezioni dell'iperbo= loide con i piani paralleli al piano xz, cioé con i piani di e= quazione $y=k$, sono delle iperboli aventi asse traverso le rette di eq. $z=0$, $y=k$.

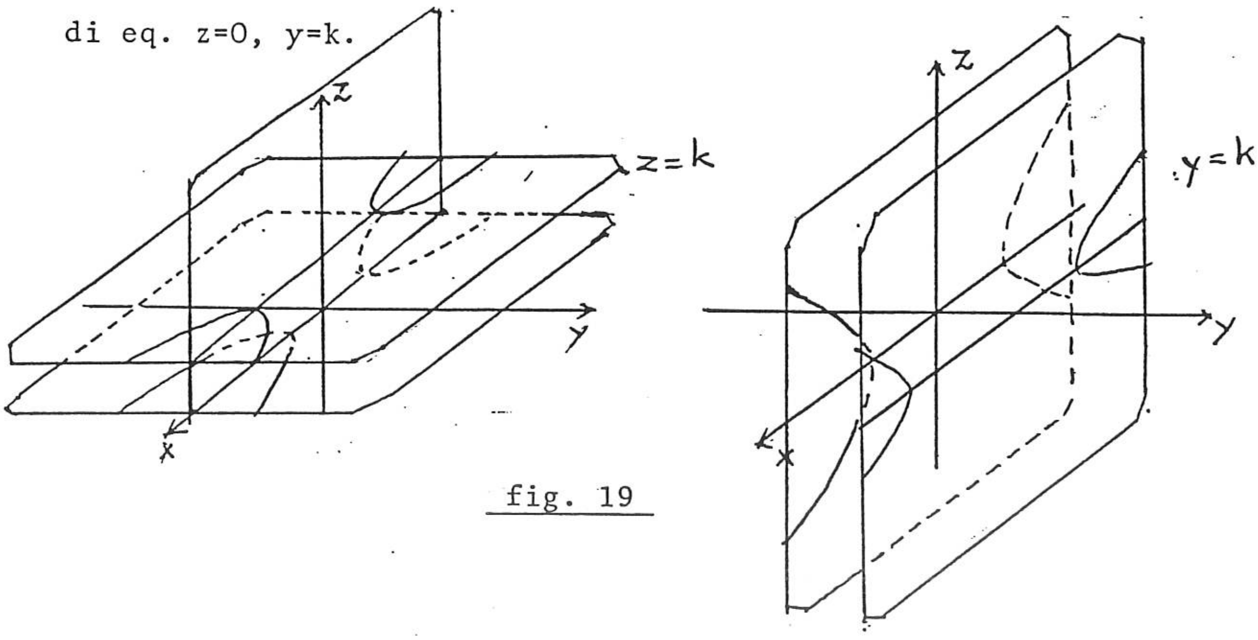



fig. 19

Una situazione diversa si ha per le sezioni dell'iperboloide con i piani paralleli al piano yz, cioé ai piani x=k. Tali sezioni hanno equazioni

$$\begin{cases} -\dfrac{y^2}{\beta^2} - \dfrac{z^2}{\gamma^2} = 1-\dfrac{k^2}{\alpha^2} \\ x = k \end{cases}$$

e si vede che se $1-\frac{k^2}{\alpha^2}>0$ cioé se $-\alpha < k < \alpha$, queste non hanno punti non avendo, il sistema corrispondente, soluzioni. Si vede così che, come preannunciato, l'iperboloide ellittico è costituito da due falde separate da una striscia di spazio, quella delimitata dai due piani di equazioni $x=\alpha$ e $x=-\alpha$, nel cui interno non cadono punti dell'iperboloide.

Se $k=\pm\alpha$ le intersezioni con i piani $x=\pm\alpha$ sono i punti $(\pm\alpha,0,0)$.

Infine se $|k|>\alpha$, allora $1-k^2/\alpha^2<0$. Il sistema, come si vede effettuando la solita traslazione, questa volta del piano yz sul piano x=k e di equazioni $x'=x-k$, $y'=y$, $z'=z$, rappresenta un'ellisse avente per semiassi $\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{k^2-\alpha^2}$ e $\frac{\gamma}{\alpha}\sqrt{k^2-\alpha^2}$; dunque al crescere di $|k|$ crescono anche gli assi dell'ellisse; inoltre se $\beta=\gamma$ allora l'ellisse si riduce ad una circonferenza di raggio $\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{k^2-\alpha^2}$ e centro il punto $(k,0,0)$, punto che appartiene, qualunque k, all'asse x; ragionando come nel caso dell'ellissoide si deduce che <u>se $\beta=\gamma$ l'iperboloide è una superficie di rotazione attorno all'asse x</u>.

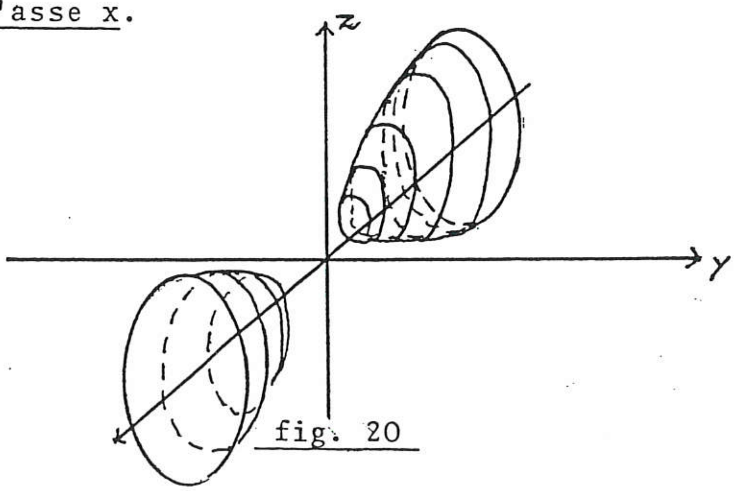



fig. 20

c) Iperboloide iperbolico

Le equazioni canoniche dell'iperboloide iperbolico sono le seguenti

$$\boxed{\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1 \qquad \alpha, \beta, \gamma > 0}$$

Anche l'iperboloide iperbolico è simmetrico rispetto a tutti gli assi e i piani coordinati e rispetto all'origine; interseca l'asse x nei punti $A(\alpha,0,0)$, $A'(-\alpha,0,0)$; l'asse y nei punti $B(0,\beta,0)$, $B'(0,-\beta,0)$ non interseca invece l'asse z. I punti $A,A',B,B'$ sono i vertici dell'ellisse di equazioni $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, $z=0$, intersezione dell'iperboloide con il piano x,y; i punti $A,A'$ sono anche i vertici dell'iperbole $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$ $y=0$, intersezione dell'iperboloide con il piano xz, iperbole avente appunto l'asse x come asse trasverso e l'asse z come asse non trasverso; i punti $B,B'$ sono anche i vertici dell'iperbole $\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=1$ $x=0$, intersezione dell'iperboloide con il piano yz, iperbole avente l'asse y come asse trasverso e l'asse z come asse non trasverso.

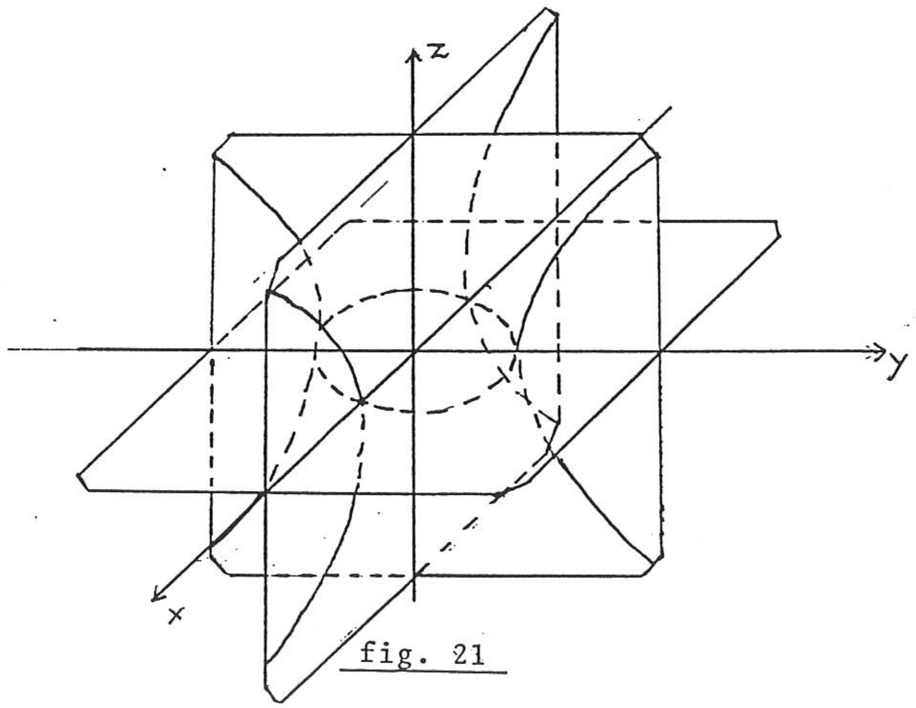
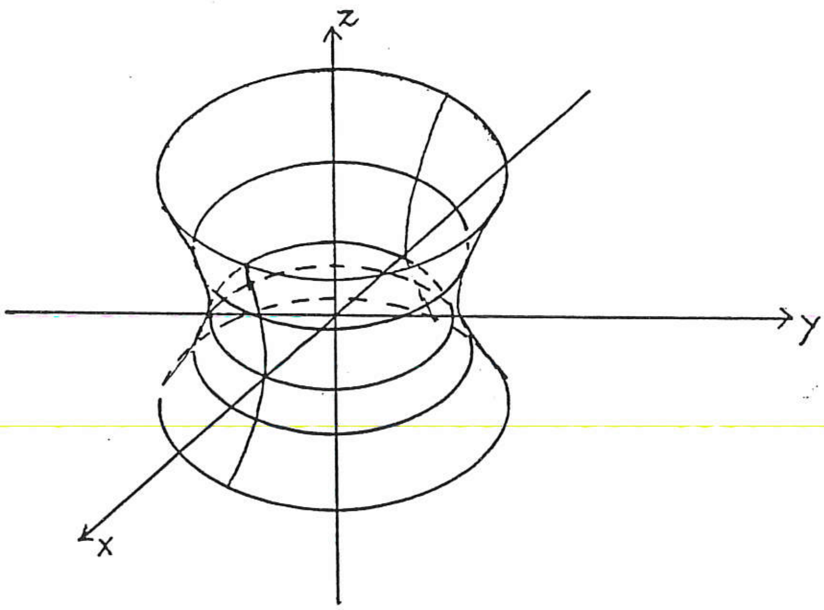



fig. 21

Le sezioni con i piani paralleli al piano xy sono tutte ellis= si aventi per equazioni le

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1 + \dfrac{k^2}{\gamma^2} \\ z = k \end{cases}$$

e quindi ellissi di semiassi $\frac{\alpha}{\gamma}\sqrt{\gamma^2+k^2}$, $\frac{\beta}{\gamma}\sqrt{\gamma^2+k^2}$, cioé di assi sem= pre più grandi quanto più grande è $|k|$ ; in particolare per k=0 si ha l'ellisse, intersezione con il piano xy, avente gli assi più piccoli; tale ellisse viene detta <u>ellisse di gola</u>. Se $\alpha = \beta$ naturalmente tutte le ellissi si riducono a circonferenze di raggio $\frac{\alpha}{\gamma}\sqrt{\gamma^2+k^2}$ e di centro (0,0,k) e anche ora si può vedere che l'iperboloide viene ad essere una superficie di rotazione ot= tenuta ruotando, ad esempio, l'iperbole intersezione dell'iperbo= loide con il piano zy, attorno all'asse z.




<u>fig. 22</u>

Le sezioni con i piani paralleli al piano xz sono date dalle equazioni

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{z^2}{\gamma^2} = 1 - \dfrac{k^2}{\beta^2} \\ y = k \end{cases}$$

sempre con il metodo di effettuare il cambiamento di coordinate $x'=x$, $y'=y-k$, $z'=z$, si vede che le equazioni rappresentano per $1-\frac{k^2}{\beta^2} > 0$, cioé per $|k| < \beta$, delle iperboli aventi asse traverso la retta $z=0$, $y=k$, intersezione del piano xy con il piano $y=k$ cui appartiene l'iperbole; per $|k| > \beta$ le equazioni scritte rap= presentano sempre delle iperboli ma con asse trasverso l'asse $x=0$, $y=k$ in quanto la quantità $1-k^2/\beta^2$ risulta, in tal caso, essere negativa.

Infine per $k=\pm\beta$ le intersezioni dell'iperboloide sono le due coppie di rette

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{z^2}{\gamma^2} = 1 \\ y = \beta \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{z^2}{\gamma^2} = 1 \\ y = -\beta \end{cases}$$

il primo sistema rappresentando appunto le due rette

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\alpha} + \dfrac{z}{\gamma} = 1 \\ y = \beta \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{\alpha} - \dfrac{z}{\gamma} = 1 \\ y = \beta \end{cases}$$

il secondo sistema rappresentando le due rette

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\alpha} + \dfrac{z}{\gamma} = 1 \\ y = -\beta \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{\alpha} - \dfrac{z}{\gamma} = 1 \\ y = -\beta \end{cases}$$

Per quanto riguarda le sezioni parallele al piano yz tutto av= viene in maniera perfettamente analoga a quanto avviene per le sezioni con i piani paralleli al piano xz.

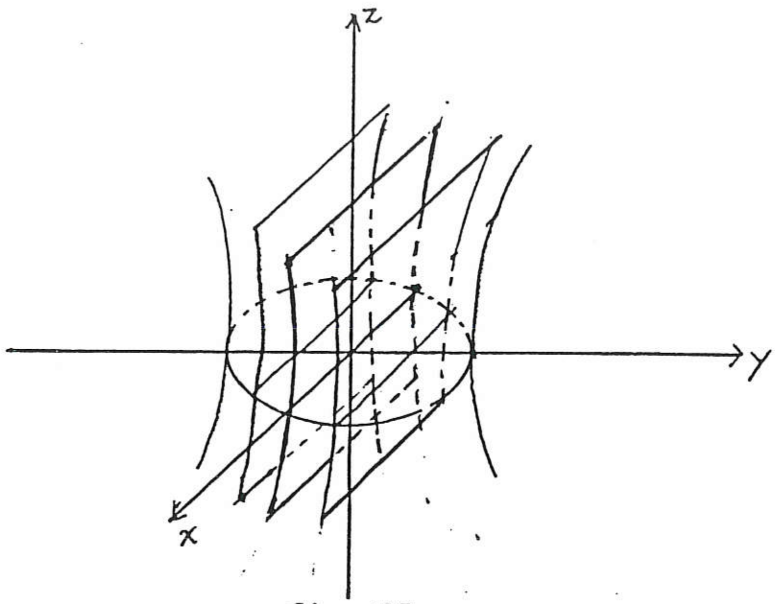



fig. 23

Considerando le sezioni con i piani paralleli al piano xz e quelle con i piani paralleli al piano yz si sono trovate (precisamente in corrispondenza ai piani $y=\pm\beta$ e $x=\pm\alpha$) delle rette appartenenti interamente all'iperboloide. Ora quelle trovate non sono le uniche rette appartenenti all'iperboloide, anzi l'iperboloide stesso può essere ottenuto facendo variare opportunamente una retta nello spazio, come ora ci accingiamo a mostrare, e viene quindi ad essere costituito da infinite rette.(superficie rigata).

Riprendiamo l'equazione dell'iperboloide e scriviamola nella forma

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1 - \frac{y^2}{\beta^2}$$

Ovvero nella forma

$$\left(\frac{x}{\alpha} + \frac{z}{\gamma}\right)\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{z}{\gamma}\right) = \left(1 + \frac{y}{\beta}\right)\left(1 - \frac{y}{\beta}\right)$$

Così scritta, l'equazione, appare subito essere conseguenza tanto del sistema

$$\begin{cases} \frac{x}{\alpha} + \frac{z}{\gamma} = t\left(1+\frac{y}{\beta}\right) \\ \frac{x}{\alpha} - \frac{z}{\gamma} = \left(\frac{1}{t} - \frac{y}{\beta}\right) \end{cases}$$

d) Paraboloide ellittico.

Il paraboloide ellittico è quello avente equazioni canoniche

$$\boxed{\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=2z \qquad \alpha,\beta>0}$$

Il paraboloide ellittico risulta simmetrico rispetto all'asse z, ma non rispetto all'asse x o all'asse y, e risulta simmetrico rispetto ai piani xz, yz, ma non rispetto al piano xy; non risulta simmetrico rispetto all'origine. Tutto ciò si deduce facilmente alla solita maniera a partire dalla osservazione delle equazioni canoniche.

Le intersezioni del paraboloide ellittico con gli assi coincidono tutte con l'origine, mentre le intersezioni con i piani coordinati sono date, quella con il piano xy da $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=0$, $z=0$, il punto $x=y=z=0$, quello con il piano xz da $x^2=2\alpha^2 z$, $y=0$, parabola con vertice nell'origine tutta contenuta nel semipiano delle z positive; l'intersezione con il piano yz è data da $y^2=2\beta^2 z$, $x=0$, anche questa una parabola di vertice l'origine e contenuta nel semipiano delle z positive.

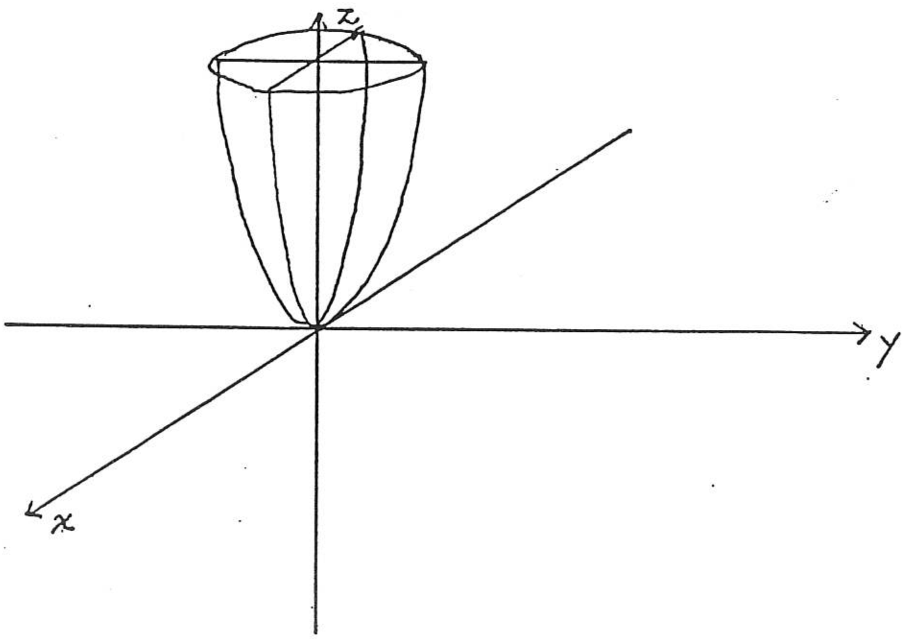



fig. 24

quanto del sistema

$$\begin{cases} \frac{x}{\alpha} + \frac{z}{\gamma} = t(1 - \frac{y}{\beta}) \\ \frac{x}{\alpha} - \frac{z}{\gamma} = \frac{1}{t}(1+\frac{y}{\beta}) \end{cases}$$

poiché è ottenibile da entrambi i sistemi scritti moltiplicando questi membro a membro. Di fatto è facile vedere che le equazioni dell'iperboloide non solo sono una conseguenza di uno qualunque dei due sistemi scritti ma equivalgono a questi: se un punto ha coordinate che verificano le equazioni dell'iperboloide allora può sempre determinarsi un t che con le coordinate del punto dà luogo ad una soluzione del primo sistema e un altro t (in generale diverso dal primo) che con le coordinate del punto dà una soluzione del secondo sistema.

I sistemi scritti, per ogni t fissato, rappresentano una retta; retta che varia al variare di t e che, variando, descrive, con i suoi punti, tutto l'iperboloide. L'iperboloide appare così descritto, al variare di t, tanto dalla retta data dalle equazioni del primo sistema, quanto dalla retta di equazioni data dal secondo sistema. Per questo l'iperboloide iperbolico è detto essere una superficie doppiamente rigata.

Le rette ottenibili da uno qualunque dei due sistemi scritti vengono dette costituire una schiera di rette. Così l'iperboloide contiene due schiere di rette: una quella relativa al primo sistema, un'altra quella relativa al secondo sistema.

Si potrebbe vedere che due diverse rette della stessa schiera (due rette ottenibili dallo stesso sistema per due diversi valori di t) sono sempre sghembe, mentre due rette appartenenti a schiere diverse sono sempre incidenti.

E passiamo alle intersezioni con i piani paralleli ai piani coordinati.

Intersecando con i piani paralleli al piano xy abbiamo le curve di equazioni $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=2k$, $z=k$, curve che sono delle ellissi se $k>0$, se $k = 0$ abbiamo già visto che sono un punto, l'origine, mentre se $k<0$ le equazioni scritte non avendo soluzioni (reali) non rappresentano alcun punto dello spazio, e in particolare il paraboloide è tutto contenuto nel semispazio delle z positive o nulle. Per vedere quanto sopra si faccia il solito uso del cambiamento di coordinate $x'=x$, $y'=y$, $z'=z-k$, relativo ad una traslazione di assi che porta il piano xy a coincidere con il piano $z=k$.

Anche ora se $\alpha=\beta$ le ellissi ottenute per $k>0$ sono tutte circonferenze, centrate nei punti $(0,0,k)$, tutti appartenenti all'asse z, e di raggi $\alpha\sqrt{2k}$. Anche nel caso del paraboloide ellittico si conclude allora che se $\alpha=\beta$ si tratta di una superficie di rotazione ottenuta ruotando attorno all'asse z la sezione del paraboloide con un piano qualunque passante per l'asse z, ad esempio con il piano xz.

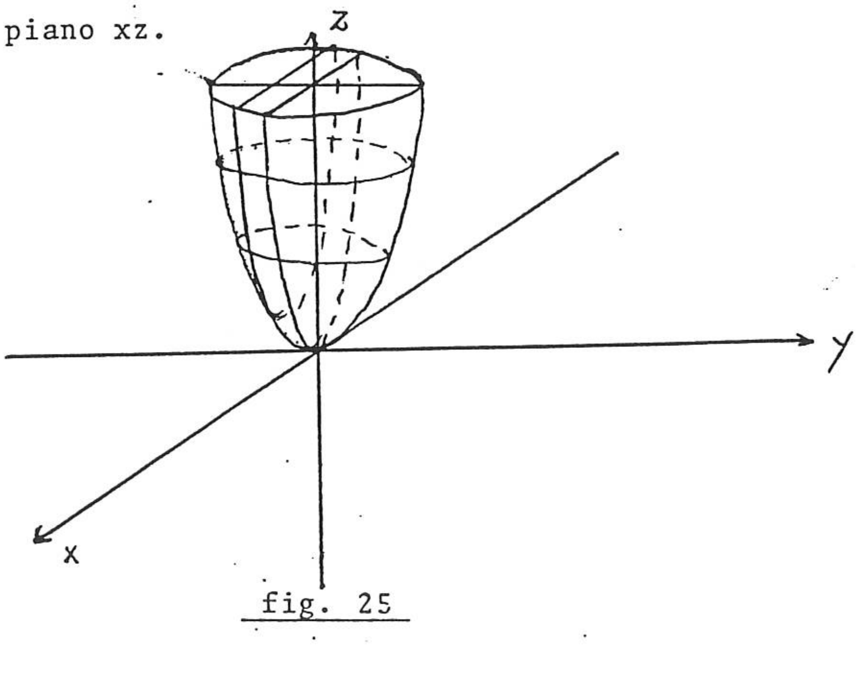



fig. 25

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & \frac{+k^2}{\beta^2} \end{vmatrix}$$



Passiamo allo studio delle sezioni con i piani paralleli al piano xz. Tali sezioni sono date al variare di k delle equazioni

$$\frac{x^2}{\alpha^2} = 2z - \frac{k^2}{\beta^2}$$
$$y = k$$

Vediamo ora di effettuare una traslazione degli assi del riferimento in maniera tale che nelle equazioni, calcolate nel nuovo riferimento, vengano a mancare i termini di grado zero. Le equazioni del cambiamento di coordinate, indotto da una traslazione, sono del tipo $x'=x+a$, $y'=y+b$, $z'=z+c$; sostituiamole nelle equazioni della sezione e otteniamo

$$\begin{cases} \frac{(x'-a)^2}{\alpha^2} = 2(z'-c)-\frac{k^2}{\beta^2} \\ y' = k+b \end{cases}$$

da cui appare che prendendo $a=0$, $b=-k$, $c=-\frac{1}{2}\frac{k^2}{\beta^2}$, cioé consideran=do il cambiamento di coordinate

22) $$x'=x, \quad y'=y-k, \quad z'=z-\frac{1}{2}\frac{k^2}{\beta^2}$$

le equazioni della sezione assumono la forma desiderata e precisamente

$$\begin{cases} \frac{(x')^2}{\alpha^2} = 2z' \\ y' = 0 \end{cases}$$

equazioni che mostrano come tali sezioni siano tutte parabole con il vertice nel punto $x'=y'=z'=0$ cioé nel punto di vecchie coordinate $(0,k,\frac{1}{2}k^2/\beta^2)$. Quando k varia il vertice della parabo=la corrispondente varierà allora descrivendo i punti $x=0$, $y=k$, $z=\frac{1}{2}k^2/\beta^2$, cioé la curva $x=0$, $z=\frac{1}{2}y^2/\beta^2$ che è la parabola sezione del paraboloide con il piano yz. Dunque il paraboloide è costi=tuito da infinite parabole tutte con il vertice sulla parabola sezione con il piano yz. Di fatto è possibile mostrare che le infinite parabole sono tutte tra loro congruenti cioé ottenibili l'una dall'altra tramite traslazioni. Ciò permette di concludere che il paraboloide ellittico è ottenibile traslando la parabola intersezione con il piano xz facendone scorrere il vertice lungo la parabola intersezione con il piano yz.

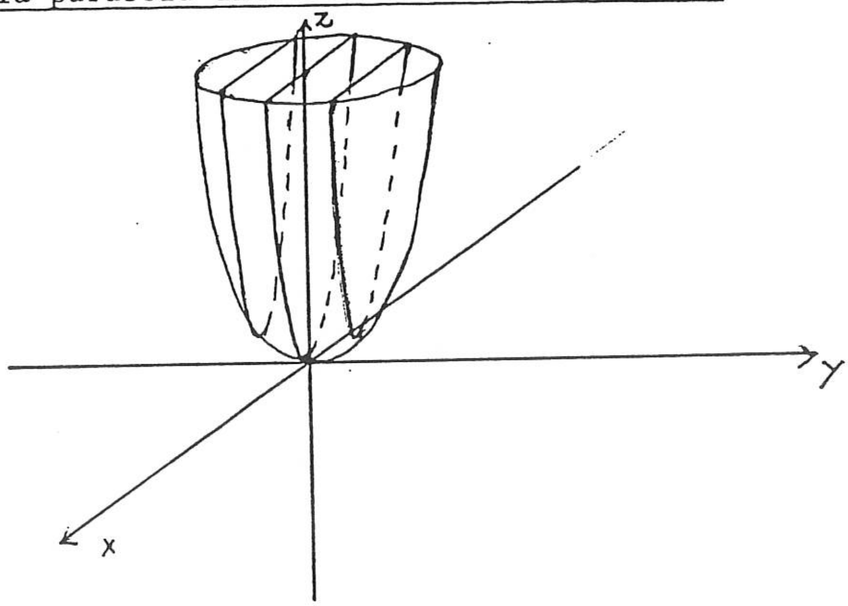



fig. 26

e) Paraboloide iperbolico

Il paraboloide iperbolico è quello di equazioni canoniche

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 2z \qquad \alpha, \beta > 0$$

Esponiamo qui brevemente i risultati tralasciandone le dimostrazioni essendo queste sostanzialmente uguali alle altre fatte nei casi precedenti.

Il paraboloide iperbolico interseca i tre assi tutti nell'origine; interseca il piano xy in due rette di equazione complessiva $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 0$ ed equazioni separate $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 0$ e $\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta} = 0$; interseca il piano xz nella parabola $x^2=2\alpha^2 z$, ed il piano yz nella parabola $y^2=-2\beta^2 z$. Si osservi che, a differenza del paraboloide ellittico nel caso del paraboloide iperbolico le due parabole non hanno la concavità orientata nello stesso verso: infatti la parabola intersezione con il piano xz è tutta contenuta nel semispazio delle z positive mentre quella intersezione con il piano yz è tutta contenuta nel semispazio delle z negative.

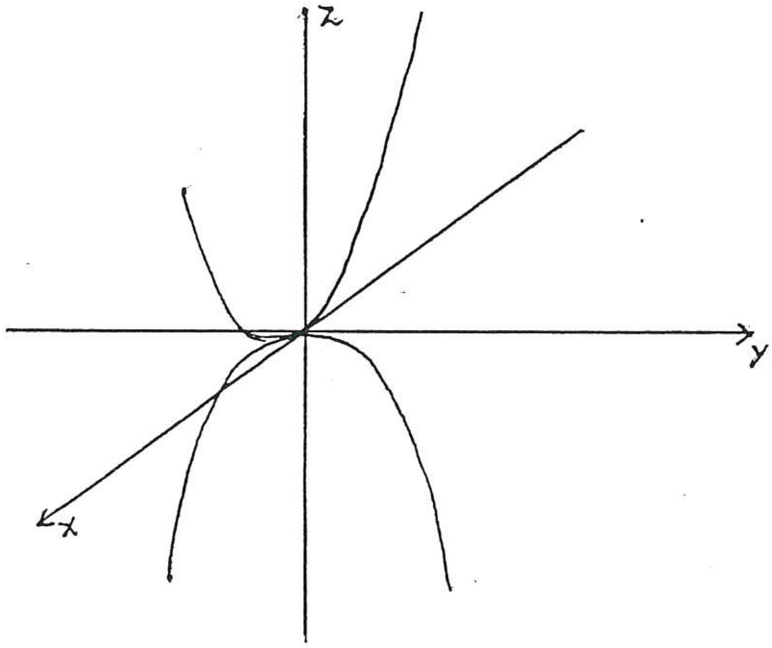



fig. 27

Andando a studiare le sezioni con i piani paralleli ai piani coordinati si trova che: le sezioni con i piani paralleli al piano xy sono le curve di equazioni:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 2k \\ z = k \end{cases}$$

Per k=0 si ha la sezione con il piano xy che, come si è visto, è costituita da due rette; per $k>0$ si hanno delle iperboli con asse trasverso la retta y=0, z=k; per $k > 0$ si hanno ancora delle iperboli ma con asse trasverso la retta x=0, z=k.

Le sezioni con i piani paralleli al piano xz sono date dalle equazioni

$$\begin{cases} x^2 = 2\alpha^2\left(z + \frac{k^2}{2\beta^2}\right) \\ y = k \end{cases}$$

Tali curve sono tutte parabole con il vertice appartenente alla parabola intersezione del paraboloide con il piano yz. Anzi si può dimostrare che il paraboloide può ottenersi traslando la parabola sua intersezione con il piano xz in modo da far descrivere, al vertice di questa, la parabola ottenuta intersecando il paraboloide con il piano yz.

Analogamente avviene per le intersezioni con i piani paralleli al piano yz.

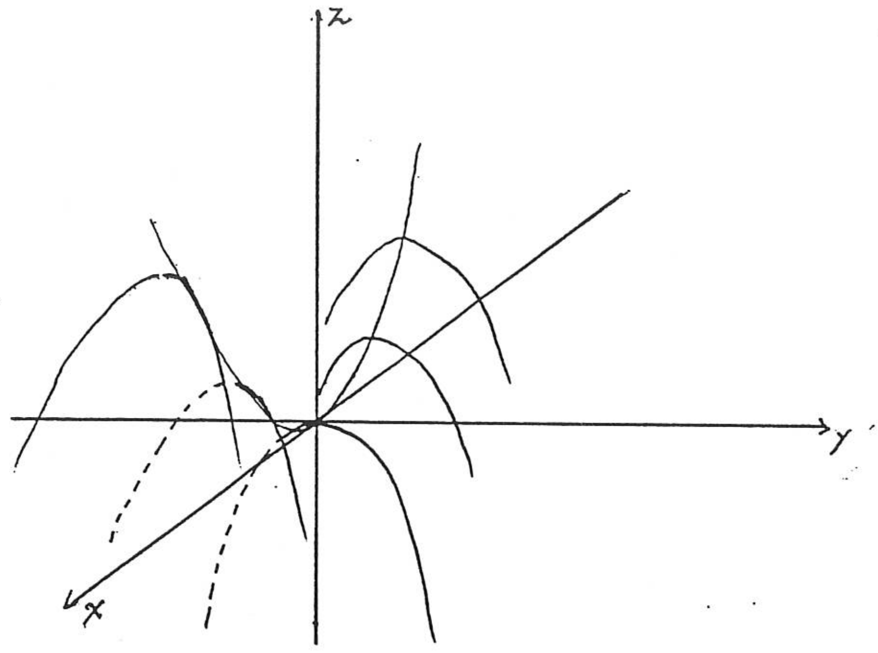



fig. 28

Infine si può dimostrare in maniera analoga a come lo si è fatto per l'iperboloide iperbolico, che il paraboloide iperbolico è doppiamente rigato da due diverse schiere di rette di equazioni rispettivamente

$$\begin{cases} \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 2tz \\ \frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta} = \frac{1}{t} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = \frac{1}{t} \\ \frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta} = 2tz \end{cases}$$

due rette della stessa schiera essendo sempre sghembe, due rette di schiere diverse essendo sempre incidenti.

3. Riduzione a forma canonica dell'equazione delle coniche.

Nel paragrafo 1) si sono definite coniche le sezioni piane di un cono rotondo.

Successivamente, scelti riferimenti particolari e facendo uso di proprietà geometriche delle coniche generali (ellisse, iperbole, parabola), si è pervenuti alle cosidétte loro equazioni canoniche.

Le equazioni canoniche sono però legate ai riferimenti che si sono scelti per calcolare: cambiando riferimenti le equazioni cambiano ma rimangono sempre del tipo

22) $$ax^2+by^2+2cxy+2dx+2ey+f = 0 \qquad (a,b,c)\neq(0,0,0)$$

cioé equazioni di secondo grado nelle coordinate cartesiane di punto.

D'altronde, come ora andremo a vedere, una equazione del tipo 22) rappresenta sempre, qualunque sia il riferimento cartesiano considerato, una conica o generale o degenere, con le sole eccezioni dell'ellisse immaginaria e della coppia di rette immaginarie.

Tali considerazioni giustificano la seguente definizione analitica di conica: dicesi conica una qualunque curva che in un ri=

ferimento cartesiano è rappresentata uguagliando a zero una e=quazione di secondo grado nelle coordinate di punto.

Osserviamo che questa definizione è ben posta: se una curva in un dato riferimento cartesiano è rappresentata da un'equazione del tipo 22) è rappresentata da un'equazione dello stesso tipo qualunque sia il riferimento scelto.

Infatti cambiando riferimento cartesiano le coordinate subi=scono una trasformazione lineare invertibile (in generale non omogenea) e, come subito si verifica, una tale trasformazione muta le equazioni 22) ancora in equazioni dello stesso tipo.

Più in particolare si può verificare che, indicata con $\varphi_2(x,y)$ la parte della 22) costituita dai termini di secondo grado

$$\varphi_2(x,y) = ax^2+by^2+2cxy$$

e detta forma quadratica associata alla conica, indicata con $\varphi_1(x,y)$ la parte lineare della 22)

$$\varphi_1(x,y) = 2dx+2ey$$

una trasformazione lineare omogenea invertibile, muta la forma $\varphi_2(x,y)$ ancora in una forma di secondo grado $\varphi'_2(x',y')=a'(x')^2+$ $+b'(y')^2+2c'x'y'$, muta la forma $\varphi_1(x,y)$ in un'altra forma linea=re $\varphi'_1(x',y')=2d'x'+2e'y'$, e lascia invariato il termine noto f.

Ciò posto supponiamo che in un riferimento cartesiano euclideo, sia stata assegnata l'equazione 22). Vogliamo determinare dei cam=biamenti di riferimento, sempre euclidei, in modo che in corri=spondenza ad essi l'equazione 22) si riduca a delle forme parti=colarmente semplici (dette forme canoniche) dalle quali risulti facile determinare di che tipo di conica si tratta.

Cominciamo con l'effettuare sulla 22) la trasformazione lineare ortogonale omogenea (invertibile) $X'=CX$ in cui la matrice C è una di quella che riduce a forma canonica la forma quadratica $\varphi_2(x,y)$, associata alla conica. Non sarà restrittivo supporre det $C=1$ ovvero che la trasformazione $X'=CX$ sia la trasformazione di coordinate indotta da una rotazione degli assi.

A trasformazione effettuata la 22) diverrà

23) $$\lambda(x')^2+\mu(y')^2+2d'x'+2e'y'+f=0$$

dove $\lambda$ e $\mu$ sono gli autovalori della matrice A associata alla forma quadratica $\varphi_2(x,y)$.

Nel nuovo riferimento la forma quadratica associata è diventata $\lambda(x')^2+\mu(y')^2$, la matrice di questa è $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}$. Da ciò appare che i versori degli assi delle x' e delle y' sono autoversori di $\lambda$ e di $\mu$ rispettivamente. Pertanto la rotazione che induce la trasformazione ortogonale $X'=CX$ è quella che trasforma gli assi x,y del riferimento inizialmente assegnato in due sottospazi ortogonali di autovettori della matrice A associata a $\varphi_2(x,y)$.

Vogliamo ora determinare una traslazione in maniera da annullare i termini lineari della 23).

Le equazioni di una generica traslazione sono:

24) $$x''=x'+\alpha\ ,\quad y''=y'+\beta\ ,$$

Sostituendo la 24) nella 23) si ottiene

25) $$\lambda(x'')^2+\mu(y'')^2+2(d'-\lambda\alpha)x''+2(e'-\mu\beta)y''+ \\ +\lambda\alpha^2+\mu\beta^2-2d'\alpha-2e'\beta+f=0$$

Si presentano ora i due casi: I $\lambda\cdot\mu\neq 0$, II $\lambda\cdot\mu=0$.

I) $\lambda\mu\neq 0$ (ovvero tanto $\lambda$ quanto $\mu$ sono non nulli).

In tal caso ponendo $\alpha=\frac{d'}{\lambda}$, $\beta=\frac{e'}{\mu}$ e indicando $h=\lambda\alpha^2+\mu\beta^2-2d'\alpha-2e'\beta+f$, la 25) assume la forma

26) $$\lambda(x'')^2+\mu(y'')^2+h=0 \qquad \lambda,\mu\neq 0$$

sulla quale torneremo in seguito.

II) $\lambda \cdot \mu=0$ (ovvero o $\lambda$ o $\mu$ nullo ma non tutti e due simultaneamente ché altrimenti la 22) non sarebbe una equazione di secondo grado ma lineare).

Supponiamo $\lambda=0$ e $\mu\neq 0$. La 25) avrà la forma

27)
$$\mu(y'')^2+2d'x''+2(e'-\mu\beta)y''+$$
$$+\mu\beta^2-2d'\alpha-2e'\beta+f=0$$

Si presentano ora due sottocasi, $II_a)$ $d'\neq 0$ $II_b)$ $d'=0$:

$II_a)$ $d'\neq 0$. Prendendo $\alpha=\frac{\mu\beta^2-2e'\beta+f}{2d'}$, $\beta=\frac{e'}{\mu}$ la 27) diviene

28)
$$\mu(y'')^2+2d'x''=0 \qquad \mu, d'\neq 0$$

anche su questa torneremo in seguito

$II_b)$ $d'=0$. Prendendo $\alpha=0$, $\beta=\frac{e'}{\mu}$ indicando con h il termine noto ottenuto in corrispondenza a tali scelte, la 27) diviene

29)
$$(y'')^2+h=0$$

Le equazioni 26), 28), 29) sono dette equazioni canoniche delle coniche e, da quello che si è visto, ogni equazione del tipo 22) può sempre trasformarsi in una di esse con un opportuno cambiamento di riferimento euclideo, costituito da una rotazione seguita da una traslazione.

Vogliamo ora vedere che curve rappresentano la 26) la 28) la 29).

A) Cominciamo con l'equazione

$$\lambda(x'')^2+\mu(y'')^2+h=0 \qquad \lambda,\mu\neq 0$$

Si possono avere i casi seguenti:

$A_1)$ $\lambda,\mu,h>0$, $A_2)$ $\lambda,\mu>0$; $h=0$, $A_3)$ $\lambda,\mu>0$, $h<0$
$A_4)$ $\lambda>0$, $\mu<0$ $h>0$; $A_5)$ $\lambda>0$, $\mu<0$ $h=0$.

Ogni altro caso essendo riconducibile a uno dei precedenti o moltiplicando tutta l'equazione per ùn segno o con un cambiamento di nome degli assi.

$A_1$) E' subito visto che la 26) non ammette soluzioni reali: è la curva cui già si è accennato come curva non compresa sulle coniche già studiate, l'ellisse immaginaria.

$A_2$) L'unica soluzione reale è la coppia (0,0) e dal punto di vista reale rappresenta solo un punto: l'origine degli assi.

$A_3$) Portando a secondo membro h e dividendo per h si vede subito che si tratta dell'equazione canonica dell'ellisse(reale).

$A_4$) Portando a secondo membro h e dividendo per h si vede che si tratta dell'equazione canonica dell'iperbole: ma si badi bene con asse trasverso l'asse y perché questo viene ad avere coefficiente positivo.

$A_5$) Sono due rette reali di equazioni separate

$$\sqrt{\lambda}\,(x'')+\sqrt{-\mu}\,(y'') = 0 \quad \text{e} \quad \sqrt{\lambda}\,(x'')-\sqrt{-\mu}\,y'' = 0$$

B) Passiamo all'equazione

$$\mu(y'')^2+2d'x'' = 0 \qquad \mu\,,\ d' \neq 0$$

sono le equazioni di una parabola contenuta nel semipiano delle $x''$ positive se $\mu>0$ e $d'<0$, in quello delle $x''$ negative se $\mu>0$ e $d'>0$.

C) Infine per l'equazione

$$\mu\,(y'')^2+h = 0 \qquad \mu \neq 0$$

i casi sostanzialmente diversi sono tre:

$C_1$) $\mu>0, h>0$ , $C_2$) $\mu>0, h<0$ , $C_3$) $\mu>0, h=0$.

$C_1$) L'equazione non ammette soluzioni reali e si dice rappresentare due rette complesse: $y''=\pm i\sqrt{\frac{h}{\mu}}$

$C_2$) L'equazione rappresenta la coppia di rette reali parallele $y''=\pm\sqrt{-\frac{h}{\mu}}$

$C_3$) L'equazione rappresenta la retta $y''=0$, cioé l'asse delle $x''$.

Si può ora capire il motivo che ci ha spinto, nel presente paragrafo, a scegliere come riferimento un riferimento euclideo ed a effettuare solo cambiamenti di riferimento euclidei: infatti una volta ricondotte le equazioni 22) alle loro forme canoniche, 26), 28), 29), per riconoscere che si trattava di un'ellisse, una iperbole, una parabola, si è semplicemente osservato che quelle trovate coincidevano con le equazioni canoniche dell'ellisse, iperbole, parabola, in precedenza trovate e tali equazioni erano le equazioni di dette curve in un riferimento euclideo.

## 4. Quadriche e loro riduzione a forma canonica.

Un'altra applicazione di quanto abbiamo visto sulla riduzione a forma canonica di una forma quadratica consiste nella riduzione a forma canonica dell'equazione di una quadrica.

Dicesi quadrica il luogo dei punti dello spazio le cui coordinate cartesiane verificano un'equazione del tipo

30) $$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2d\,xy + 2\,exz + 2\,fyz + 2gx + 2hy + 2\,lz + m = 0$$

Anche ora è facile convincersi che tale nozione di quadrica non dipende dal riferimento cartesiano che si sceglie, non sarà quindi restrittivo supporre, come faremo sempre nel seguito, di essere in un riferimento cartesiano ortonormale.

Supponiamo dunque di assegnare, in un riferimento cartesiano ortonormale, l'equazione 30) di una quadrica. In particolare rimarrà individuata la forma quadratica

31) $$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2cxz + 2fyz$$

dei suoi termini di II. grado. Come si è fatto per le coniche anche ora scegliendo come nuovo riferimento quello avente per versori degli autovettori unitari associati alla matrice simmetrica A della forma quadratica 31) l'equazione 30) diviene nel nuovo riferimento

32) $$\lambda(x')^2 + \mu(y')^2 + \nu(z')^2 + 2g'x' + 2h'y' + 2l'z' + m = 0$$

dove naturalmente $\lambda, \mu, \nu$ sono gli autovalori di A supposti non tutti e tre nulli chè altrimenti l'equazione considerata non sarebbe di secondo grado ma di primo e rappresenterebbe un piano.

Si distinguono ora tre casi:

I) $\lambda \cdot \mu \cdot \nu \neq 0$. Effettuando allora la traslazione

33) $$x'' = x' + \frac{g'}{\lambda} \qquad y'' = y' + \frac{h'}{\mu} \qquad z'' = z' + \frac{l'}{\nu}$$

l'equazione 32) si riduce alla

34) $$\lambda(x'')^2 + \mu(y'')^2 + \nu(z'')^2 + h = 0 \;.$$

Ora se $\lambda, \mu, \nu$, h sono dello stesso segno detta equazione non ammette soluzioni nel campo reale e la quadrica è detta <u>ellisoide immaginario</u>. Così se $\lambda, \mu, \nu$ sono dello stesso segno ma h è nullo l'unica soluzione reale è (0, 0, 0) cioè la quadrica contiene solo l'origine e viene detta <u>cono immaginario</u>. Se $\lambda, \mu, \nu$ sono dello stesso segno e h è di segno opposto allora l'equazione 34) può scriversi

35) $$\frac{(x'')^2}{\alpha^2} + \frac{(y'')^2}{\beta^2} + \frac{(z'')^2}{\gamma^2} = 1$$

e la quadrica è detta <u>ellisoide</u> (reale).

Se $\lambda, \mu, \nu$ non sono tutti dello stesso segno a meno di scambi degli assi l'equazione 34) può essere messa in una delle forme seguenti

36) $$\frac{(x'')^2}{\alpha^2} - \frac{(y'')^2}{\beta^2} - \frac{(z'')^2}{\gamma^2} = 1$$ (<u>iperboloide a due falde</u>)

37) $$\frac{(x'')^2}{\alpha^2} + \frac{(y'')^2}{\beta^2} - \frac{(z'')^2}{\gamma^2} = 1$$ (<u>iperboloide a una falda</u>)

38) $$\frac{(x'')^2}{\alpha^2} + \frac{(y'')^2}{\beta^2} - \frac{(z'')^2}{\gamma^2} = 0$$ (cono)

Passiamo al secondo caso

II) $\lambda\mu \neq 0$, $\nu = 0$. (Analogamente se $\lambda\nu \neq 0$, $\mu = 0$ o se $\lambda = 0$ e $\mu\nu \neq 0$).
In tali casi effettuando una traslazione conveniente l'equazione della quadrica assume una delle forme seguenti.

39) $$\frac{(x'')^2}{\alpha^2} + \frac{(y'')^2}{\beta^2} = 2z$$ (paraboloide ellittico)

40) $$\frac{(x'')^2}{\alpha^2} - \frac{(y'')^2}{\beta^2} = 2z$$ (paraboloide iperbolico)

41) $$\frac{(x'')^2}{\alpha^2} + \frac{(y'')^2}{\beta^2} = h$$ (cilindro)

42) $$\frac{(x'')^2}{\alpha^2} - \frac{(y'')^2}{\beta^2} = h$$ (cilindro)

Nell'equazione 41) se $h > 0$ il cilindro ha punti reali.
Se $h = 0$ l'unico punto del cilindro è l'origine se $h < 0$ il cilindro non ha punti ed è detto immaginario.

Nell'equazione 42) se $h = 0$ l'equazione si può scrivere

$\left(\frac{(x'')}{|\alpha|} + \frac{(y'')}{|\beta|}\right)\left(\frac{x''}{|\alpha|} - \frac{y''}{|\beta|}\right) = 0$; pertanto il cilindro viene ad essere costituito da due piani di equazioni $\frac{x''}{|\alpha|} + \frac{y''}{|\beta|} = 0$ e $\frac{x''}{|\alpha|} - \frac{y''}{|\beta|} = 0$.

Passiamo ora al terzo caso:

III $\lambda \neq 0$, $\mu = \nu = 0$ (analogamente se $\lambda = \nu = 0$, $\mu \neq 0$, o se $\lambda = \mu = 0$, $\nu \neq 0$).
Al solito con una traslazione ed una rotazione opportune l'equazione della quadrica può scriversi

o 43) $(x'')^2 - 2\mu y'' = 0$ (cilindro)

o 44) $(x'')^2 = k$ (coppia di piani reali o immaginari).