14. NUMERI COMPLESSI

14.1. Nell'insieme delle coppie ordinate di numeri reali $C = R \times R$, definiamo due operazioni di addizione e moltiplicazione ponendo, per ogni $z = (x,y)$, $z' = (x',y') \in C$

$$z + z' = (x + x',\ y + y'),$$
$$z \cdot z' = (x \cdot x' - y \cdot y',\ x \cdot y' + x' \cdot y).$$

E' facile verificare che anche per queste operazioni in C valgono le proprietà A 1,2,3,4, M 1,2,3,4,5, del capitolo 12. Ogni insieme K su cui siano definite una somma e un prodotto che soddisfano le condizioni A, M si dice ~~*corpo*~~ CAMPO. Dunque Q,R,C sono ~~corpi~~ CAMPI, detti rispettivamente il ~~*corpo*~~ CAMPO *razionale*, *reale* e *complesso*; gli ele-

ASSIOMI DI CAMPO

$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

menti di C si chiamano i numeri complessi. In particolare, lo zero e l'unità di C sono rispettivamente $(0,0)$, $(1,0)$; l'opposto di $z=(x,y)$ è $-z=(-x,-y)$; l'inverso di $z=(x,y)\neq(0,0)$ è $z^{-1}=(x/(x^2+y^2),\ -y/(x^2+y^2))$. A titolo di esempio, dimostriamo l'*associatività* della moltiplicazione. Siano

$$z'=(x',y');\qquad z''=(x'',y'');\qquad z'''=(x''',y''');$$

allora

$$\begin{aligned}(z'\cdot z'')\cdot z''' &= ((x',y')\cdot(x'',y''))\cdot(x''',y''') = (x'\cdot x''-y'\cdot y'',x'\cdot y''+x''\cdot y')\cdot\\ &\quad (x''',y''') =\\ &= ((x'\cdot x''-y'\cdot y'')\cdot x'''-(x'\cdot y'')\cdot y''',(x'\cdot x''-y'\cdot y'')\cdot y'''+(x'\cdot y''+\\ &\quad +x''\cdot y')\cdot x''') =\\ &= (x'\cdot x''\cdot x'''-y'\cdot y''\cdot y'''-x'\cdot y''\cdot y'''-y'\cdot x''\cdot y''',x'\cdot x''\cdot y'''-\\ &\quad -y'\cdot y''\cdot y'''+x'\cdot y''\cdot x'''+y'\cdot x''\cdot x''') =\\ &= (x'\cdot(x''\cdot x'''-y''\cdot y''')-y'\cdot(x''\cdot y'''+y''\cdot x'''),x'\cdot(x''\cdot y'''+\\ &\quad +y''\cdot x''')+y'\cdot(x''\cdot x'''-y''\cdot y''')) =\\ &= (x',y')\cdot(x''\cdot x'''-y''\cdot y''',x''\cdot y'''+y''\cdot x''') =\\ &= (x',y')\cdot((x'',y'')\cdot(x''',y''')) =\\ &= z'\cdot(z''\cdot z''').\end{aligned}$$

14.2. L'applicazione $f:R\to C$ definita da $x\mapsto(x,0)$ è iniettiva e conserva le somme e i prodotti. Ciò si verifica subito; ad esempio: $f(x_1x_2)=(x_1x_2,0)=(x_1,0)\cdot(x_2,0)=f(x_1)f(x_2)$. Ciò significa che (in analogia a quanto già fatto per Z in Q e per Q in R) possiamo *identificare* i numeri reali con i numeri complessi della forma $(x,0)$, e pensare ad R come sottoinsieme di C.

14.3. Il numero complesso $(0,1)$ si denota con il simbolo i; esso gode della proprietà che il suo quadrato è l'opposto dell'unità: $i^2=(0,1)^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-(1,0)=-1$. L'elemento i si chiama l'*unità immaginaria*. Ogni numero complesso (x,y) si può scrivere nella forma $(x,0)+(0,1)(y,0)=(x,0)+(0,y)=(x,y)$. $(x,0)$ si dice la *parte reale* di $z=(x,y)$, e si indica con $\mathrm{Re}(z)$. $(y,0)$ si dice il *coefficiente dell'immaginario* di $z=(x,y)$, e si indica con $\mathrm{Im}(z)$. Ogni $z\in C$ si può dunque scrivere $z=\mathrm{Re}(z)+i\mathrm{Im}(z)$. Con l'identificazione di $(x,0)$, $(y,0)$ con i reali x,y, risulterà $z=x+iy$. Si ha $x+iy=x'+iy'(x,x',y,y'\in R)$ se e solo se $x=x'$, $y=y'$.

La scrittura $z=x+iy$ è particolarmente comoda, perchè le somme e i prodotti dei numeri complessi in questa forma si ottengono applicando le usuali regole del *calcolo letterale*, e tenendo presente che $i^2=-1$. Ad esempio, applicando formalmente le note proprietà (distributiva ecc.) si calcola $(x+iy)(x'+iy')=xx'+i^2yy'+i(xy'+x'y)$. Sostituito -1 a i^2, ciò equivale a scrivere $(x,y)(x',y')=(xx'-yy',\ xy'+x'y)$, che è appunto la definizione del prodotto.