Algebra Lineare. Gruppo I-Z. Prof. P. Piazza

Complementi sulla rappresentazione delle applicazioni lineari mediante matrci.

Abbiamo visto a lezione che ogni applicazione lineare da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ può essere scritta come una matrice $m \times n$. Più precisamente abbiamo mostrato che questa corrispondenza è in effetti un isomorfismo di spazi vettoriali $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \simeq M_{m,n}(\mathbb{R})$.

Vediamo ora come questa costruzione si generalizzi al caso di applicazioni lineari tra due spazi vettoriali qualunque V e W. Nella dimostrazione nel caso di $\mathbb{R}^n$ ed $\mathbb{R}^m$, l'ingrediante essenziale per passare da un'applicazione lineare ad una matrice era l'esistenza di coordinate su $\mathbb{R}^n$ ed $\mathbb{R}^m$. Per generalizzare agli spazi V e W avremo pertanto bisogno di sistemi di coordinate per questi spazi, ovvero di due basi: una base $\mathcal{B}$ per V ed una base $\mathcal{E}$ per W. Scriviamo per esteso $\mathcal{B} = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ e $\mathcal{E} = \{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_m\}$. A questo punto è chiaro come prodedere: le due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{E}$ identificano V e W con $\mathbb{R}^n$ ed $\mathbb{R}^m$ rispettivamente. Mediante quest'identificazione, un'applicazione lineare $\varphi\colon V \to W$ viene identificata ad un'applicazione lineare tra $\mathbb{R}^n$ ed $\mathbb{R}^m$ e dunque ad una matrice $m \times n$, che indicheremo con $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$. Diciamo che la matrice $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ rappresenta l'applicazione lineare φ rispetto alle basi $\mathcal{B}$ (base di partenza) e $\mathcal{E}$ (base di arrivo). Una volta che le basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{E}$ sono fissate, possiamo guardare $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}$ come un'applicazione dall'insieme delle applicazioni lineari tra V e W e l'insieme delle matrici $m \times n$. E' semplice rendersi conto che l'applicazione $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}$ è lineare, ed è in effetti un isomorfismo, abbiamo cioè

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}\colon \mathcal{L}(V, W) \xrightarrow{\sim} M_{\dim W, \dim V}(\mathbb{R})$$

Cerchiamo ora di essere un po' più espliciti: data un'applicazione lineare $\varphi\colon V \to W$, chi è la matrice $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$? Per come l'abbiamo definita, $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ è caratterizzata dalla seguente proprietà: *se il vettore $\underline{v} \in V$ ha coordinate $(x_1, \dots, x_n)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$, allora le coordinate del vettore immagine $\varphi(\underline{v})$ rispetto alla base $\mathcal{E}$ di W sono date dal prodotto righe per colonne*

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(\varphi) \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix},$$

ovvero, indicate con $(y_1, \dots, y_m)$ le coordinate di $\varphi(\underline{v})$ rispetto alla base $\mathcal{E}$, si ha

$$\begin{vmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{vmatrix} = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(\varphi) \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix}$$

Osserviamo che l'affermazione “il vettore $\underline{v} \in V$ ha coordinate $(x_1, \dots, x_n)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$” equivale a

$$\underline{v} = x_1\underline{b}_1 + \cdots + x_n\underline{b}_n = \begin{vmatrix} \underline{b}_1 & \cdots & \underline{b}_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix}$$

e dunque, per linearità,

$$\varphi(\underline{v}) = x_1\varphi(\underline{b}_1) + \cdots + x_n\varphi(\underline{b}_n) = \begin{vmatrix} \varphi(\underline{b}_1) & \cdots & \varphi(\underline{b}_n) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix}$$

Analogamente, "il vettore $\varphi(\underline{v}) \in W$ ha coordinate $(y_1, \ldots, y_m)$ rispetto alla base $\mathcal{E}$" equivale a

$$\varphi(\underline{v}) = y_1\underline{e}_1 + \cdots + y_n\underline{e}_m = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \cdots & \underline{e}_m \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{vmatrix}$$

Ricaviamo così l'identità

$$\begin{vmatrix} \varphi(\underline{b}_1) & \cdots & \varphi(\underline{b}_n) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \cdots & \underline{e}_m \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{vmatrix}$$

A questo punto, ricordando come sono legate le coordinate x_i con le coordinate y_j mediante la matrice $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$, troviamo

$$\begin{vmatrix} \varphi(\underline{b}_1) & \cdots & \varphi(\underline{b}_n) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \cdots & \underline{e}_m \end{vmatrix} \cdot M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(\varphi) \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix}$$

e dunque, dovendo quest'ultima identità valere per ogni scelta di $x_1, \ldots, x_n$,

$$\begin{vmatrix} \varphi(\underline{b}_1) & \cdots & \varphi(\underline{b}_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \cdots & \underline{e}_m \end{vmatrix} \cdot M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$$

Vale a dire: *la i-esima colonna della matrice $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ è formata dalle coordinate del vettore $\varphi(\underline{b}_i)$ rispetto alla base $\mathcal{E}$.*

Nel caso particolare in cui $V = W$, possiamo considerare l'applicazione lineare $\mathrm{Id}_V \colon V \to V$. Date due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di V, avremo una matrice $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_V)$ che rappresenta l'identità di V rispetto a queste due basi. Tale matrice prende il nome di matrice del cambio di base (o del cambio di coordinate) dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{B}'$. Rileggendo quanto scritto sopra nel caso particolare $\varphi = \mathrm{Id}_V$ otteniamo immediatamente che

$$\begin{vmatrix} \underline{b}_1 & \cdots & \underline{b}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{b}'_1 & \cdots & \underline{b}'_n \end{vmatrix} \cdot M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_V)$$

ovvero: *la i-esima colonna della matrice del cambio di base $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_V)$ è costituita dalle coordinate dell'i-esimo vettore della base $\mathcal{B}$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$. Inoltre, se indichiamo con $(x_1, \ldots, x_n)$ le coordinate di un vettore di V rispetto alla base $\mathcal{B}$ e con $(y_1, \ldots, y_n)$ le sue coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}'$, si ha*

$$\begin{vmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{vmatrix} = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_V) \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix}$$

Una delle proprietà più importanti dell'isomorfismo $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \simeq M_{m,n}(\mathbb{R})$ era il fatto che quest'isomorfismo rispetta la composizione di applicazioni, o più precismamente, fa corrispondere la composizione di applicazioni lineari al prodotto di matrici; in simboli: $L_A \circ L_B = L_{AB}$. Gli isomorfismi $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}$ godono della stessa proprietà: se V, W ed U sono tre spazi vettoriali dotati di basi $\mathcal{B}, \mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ rispettivamente, e $\varphi\colon V \to W$ e $\psi\colon W \to U$ sono applicazioni lineari allora

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}}(\psi \circ \varphi) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}(\psi) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\varphi) \tag{1}$$

Notate come le due basi ripetute in diagonale (una in basso a sinistra, l'altra in alto a destra) si "elidono" ed i due argomenti φ e ψ si "contraggono". La dimostrazione della formula è molto semplice. Scriviamo le basi per esteso: $\mathcal{B} = \{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n\}$, $\mathcal{E} = \{\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_m\}$ e $\mathcal{F} = \{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k\}$. Allora, per quanto osservato poco fa,

$$\begin{vmatrix} (\psi \circ \varphi)(\underline{b}_1) & \cdots & (\psi \circ \varphi)(\underline{b}_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{f}_1 & \cdots & \underline{f}_k \end{vmatrix} \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}}(\psi \circ \varphi)$$

Ma vale anche

$$\begin{vmatrix} \varphi(\underline{b}_1) & \cdots & \varphi(\underline{b}_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \cdots & \underline{e}_m \end{vmatrix} \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\varphi)$$

e dunque

$$\begin{vmatrix} (\psi \circ \varphi)(\underline{b}_1) & \cdots & (\psi \circ \varphi)(\underline{b}_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \psi(\underline{e}_1) & \cdots & \psi(\underline{e}_m) \end{vmatrix} \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\varphi)$$

D'altra parte

$$\begin{vmatrix} \psi(\underline{e}_1) & \cdots & \psi(\underline{e}_m) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{f}_1 & \cdots & \underline{f}_k \end{vmatrix} \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}(\psi)$$

e otteniamo così

$$\begin{vmatrix} (\psi \circ \varphi)(\underline{b}_1) & \cdots & (\psi \circ \varphi)(\underline{b}_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{f}_1 & \cdots & \underline{f}_k \end{vmatrix} \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}(\psi) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\varphi)$$

Abbiamo così ottenuto l'uguaglianza

$$\begin{vmatrix} \underline{f}_1 & \cdots & \underline{f}_k \end{vmatrix} \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}}(\psi \circ \varphi) = \begin{vmatrix} \underline{f}_1 & \cdots & \underline{f}_k \end{vmatrix} \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}(\psi) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\varphi)$$

Poiché $\mathcal{F}$ è una base di U, quest'ultima uguaglianza equivale a

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}}(\psi \circ \varphi) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}(\psi) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\varphi)$$

che era quanto volevamo dimostrare.

Iterando la formula appena dimostrata, si ottiene la formula per la composizione di un numero arbitrario di applicazioni lineari. Ad esempio se $\eta\colon U \to S$ è un'ulteriore applicazione lineare, e $\mathcal{G}$ è una base di S, allora

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{G}}(\eta \circ \psi \circ \varphi) &= M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{G}}\big((\eta \circ (\psi \circ \varphi)\big) \\ &= M_{\mathcal{F}}^{\mathcal{G}}(\eta) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}}(\psi \circ \varphi) \\ &= M_{\mathcal{F}}^{\mathcal{G}}(\eta) \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}(\psi) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\varphi) \end{aligned}$$

Notate che continua a valere l'elisione delle basi ripetute sulle "diagonali" basso-sinistra/alto-destra.

Un'applicazione particolare della formula composizione/prodotto riguarda la matrice associata all'applicazione inversa di un'applicazione invertibile $\varphi\colon V \to W$. Abbiamo

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(\varphi^{-1}) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\varphi) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_V) = \mathrm{Id}_{\dim V}$$

L'ultima identità esprime il fatto che la matrice corrispondente all'applicazione identica $\mathrm{Id}_V : V \to V$, rispetto ad una stessa base $\mathcal{B}$, scelta sia come base di partenza che di arrivo, è la matrice identità di rango $\dim V$ (segue immediatamente dalla descrizione delle colonne della matrice associata ad un'applicazione lineare ricavata poco fa). Otteniamo così la formula

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(\varphi^{-1}) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\varphi)^{-1}$$

Notate che le basi si scambiano di posto. Un corollario immediato di quest'ultima formula è la "formula magica" che lega le matrici che rappresentano un'applicazione $\varphi\colon V \to V$ rispetto a basi diverse $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ (scelte sia come basi di partenza che come basi di arrivo). Come ricorderete dalle lezioni, se indichiamo con A la matrice che rappresenta φ nella base $\mathcal{B}$, con B la matrice che rappresenta φ nella base $\mathcal{B}'$ e con P la matrice del cambio di base dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{B}'$, allora

$$A = P^{-1} \cdot B \cdot P \qquad \text{(formula magica)}$$

La dimostrazione della formula magica con le notazioni appena introdotte è particolarmente semplice. Iniziamo con l'osservare che si ha:

$$A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi); \qquad B = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(\varphi); \qquad P = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_V)$$

Dunque

$$\begin{aligned} A &= M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi) \\ &= M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_V^{-1} \circ \varphi \circ \mathrm{Id}_V) \\ &= M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V^{-1}) \cdot M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(\varphi) \cdot M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_V) \\ &= M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_V)^{-1} \cdot M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(\varphi) \cdot M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_V) \\ &= P^{-1} \cdot B \cdot P \end{aligned}$$

Analogamente si dimostra la formula più generale a pagina 163 del libro (formula (8.4)).

Facciamo ora uso del linguaggio appena introdotto per risolvere rapidamente un esercizio già visto a lezione:

Esercizio. Sia $V = \mathbb{R}^3$. È facile verificare che l'applicazione lineare definita da

$$F(1,1,0) = (1,2,-1)\,, \quad F(0,1,1) = (-1,1,1)\,, \quad F(0,0,1) = (-1,0,1)$$

è ben definita [1].
Consideriamo la base canonica

$$\mathcal{E} = \{\underline{e}_1 := (1,0,0), \underline{e}_2 := (0,1,0), \underline{e}_3 := (0,0,1)\}$$

in $\mathbb{R}^3$.
Determinare la matrice A associata ad F con la seguente scelta di basi

$$\text{base di partenza} = \mathcal{E}\,, \quad \text{base di arrivo} = \mathcal{E}$$

Soluzione. Indichiamo con $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e con $\mathcal{E}'$ la base $\{\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3\}$, dove

$$\underline{e}'_1 = (1,1,0); \qquad \underline{e}'_2 = (0,1,1); \qquad \underline{e}'_3 = (0,0,1).$$

La matrice che vogliamo determinare è $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(F)$. È bene capire quali sono le informazioni di cui siamo in possesso: il testo dell'esercizio ci dà $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'}(F)$ e $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'}(\mathrm{Id})$. Infatti, dai dati dell'esercizio leggiamo direttamente

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'}(F) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\,, \quad M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'}(\mathrm{Id}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}\,.$$

Abbiamo dimostrato che

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(F) = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'}(F) \cdot M^{\mathcal{E}'}_{\mathcal{E}}(\mathrm{Id})$$

[1] i tre vettori $\{(1,1,0); (0,1,1); (0,0,1)\}$ sono una base di $\mathbb{R}^3$

e che
$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}(\mathrm{Id}) = M_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}(\mathrm{Id})^{-1}$$
Ma allora
$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(F) = M_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}(F) \cdot M_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}(\mathrm{Id})^{-1}$$
e ritroviamo la soluzione già vista a lezione.