

ISTITUZIONI DI MATEMATICHE

Corso di Laurea in Scienze Ambientali - A.A.2003-2004

Esercizi su limiti ed asintoti: 26 Novembre 2003

Determinare dominio di definizione ed asintoti delle seguenti funzioni:

(1) $f(x) = \frac{1}{1-x}$

(2) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$

(3) $f(x) = \frac{x^4+1}{x^3+1}$

(4) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

(5) $f(x) = x \log x$

(6) $f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}$

(7) $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$

(8) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2(x-1)}{x+1}}$

Soluzioni.

(1). La funzione $f(x) = \frac{1}{1-x}$ è definita in $\{x \in \mathbb{R}, x \neq 1\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. La retta $x = 1$ è un asintoto verticale dato che

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1-x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-x} = +\infty$$

Infatti se $x > 1$ allora la quantità $1-x$, e quindi $\frac{1}{1-x}$, è negativa; se $x < 1$ allora la quantità $1-x$, e quindi $\frac{1}{1-x}$, è positiva. I limiti (1) dovrebbero ora essere chiari. Notiamo poi che

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1-x} = 0$$

e quindi l'asse x , di equazione $y = 0$, è un asintoto orizzontale sia a $+\infty$ che a $-\infty$.

(2). La funzione $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ è definita quando $1-x^2 \neq 0$, cioè quando $x \neq 1$ e $x \neq -1$. Concludiamo che $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Le rette $x = 1$ e $x = -1$ sono due asintoti verticali. Infatti

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1-x^2} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-x^2} = +\infty$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{1-x^2} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{1-x^2} = +\infty$$

Per capire questi 4 limiti osserviamo che la funzione $1-x^2$ è positiva per $-1 < x < 1$, cioè $x \in (-1, 1)$, negativa per $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ e si annulla per $x = 1$ e $x = -1$. In particolare $\frac{1}{1-x^2}$ è positiva per $x \in (-1, 1)$ e negativa per $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Il limite (2) si spiega allora osservando che per $x > 1$, x vicino ad 1, la quantità $\frac{1}{1-x^2}$ è negativa e in valore assoluto molto grande, mentre per $x < 1$, x vicino a 1, la quantità $\frac{1}{1-x^2}$ è positiva e molto grande. Analogamente si ragiona per il limite (3).

Notiamo poi che

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1-x^2} = 0$$

e quindi la retta $y = 0$, cioè l'asse x , è un asintoto orizzontale.

(3) La funzione $f(x) = \frac{x^4+1}{x^3+1}$ è definita in $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, dato che $x = -1$ è l'unica soluzione reale dell'equazione $x^3 + 1 = 0$. Si ha

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^4 + 1}{x^3 + 1} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^4 + 1}{x^3 + 1} = -\infty$$

e quindi la retta $x = -1$ è un asintoto verticale. Dato che

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4 + 1}{x^3 + 1} = \pm\infty$$

non ci sono asintoti orizzontali ma ci possono essere asintoti obliqui.

Per capire se esiste un asintoto obliquo a $+\infty$ dobbiamo innanzitutto calcolare il limite

$$(6) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

cioè il limite

$$(7) \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4 + 1}{x(x^3 + 1)}$$

Se questo limite esiste ed è uguale a m allora m sarà il coefficiente angolare dell'eventuale asintoto obliquo. Se questo limite non esiste oppure non è finito allora concludiamo che non c'è un asintoto obliquo a $+\infty$.

Dato che

$$(8) \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4 + 1}{x(x^3 + 1)} = 1$$

vediamo che può esistere un asintoto obliquo, e che se esiste esso sarà del tipo $y = x + q$.

Per completare la nostra analisi calcoliamo poi

$$(9) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$$

Se questo limite esiste ed è uguale a q allora $y = x + q$ sarà l'asintoto obliquo a $+\infty$. Se questo limite non esiste oppure non è finito allora concludiamo che non c'è un asintoto obliquo a $+\infty$. Essendo

$$(10) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^4 + 1}{x^3 + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x}{x^3 + 1} = 0$$

possiamo concludere che la retta $y = 1x + 0$, cioè la retta $y = x$, è un asintoto obliquo a $+\infty$. Analogamente si dimostra che la retta $y = x$ è anche un asintoto obliquo a $-\infty$

(4) La funzione $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ ha come insieme di definizione tutto \mathbb{R} . Non ci sono asintoti verticali. Dato che

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{1+x^2} = +\infty$$

non ci sono asintoti orizzontali; ci possono essere asintoti obliqui. Concentriamoci su $+\infty$.

Calcoliamo allora

$$(11) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

e se questo limite esiste finito uguale a m , anche

$$(12) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx)$$

Se anche questo limite esiste finito ed uguale a q allora $y = mx + q$ sarà l'asintoto obliquo a $+\infty$

Passiamo ai conti: si ha

$$(13) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} = 1$$

Inoltre

$$(14) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1 + x^2} - x)$$

e moltiplicando numeratore e denominatore per $\sqrt{x^2 + 1} + x$ otteniamo che (14) è uguale a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(1 + x^2) - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + x^2} + x} = 0$$

Quindi la retta $y = 1x + 0$ e cioè la retta $y = x$ è un asintoto obliquo a $+\infty$.

Procedendo in maniera analoga si dimostra che $y = -x$ è un asintoto obliquo a $-\infty$.

(5) Il Dominio di definizione è $\text{Dom}(x \log x) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. L'unico asintoto verticale può essere $x = 0$. Dato che $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = 0$ vediamo che non ci sono asintoti verticali. Inoltre $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log x = +\infty$, quindi non ci sono asintoti orizzontali. Vediamo se c' è un asintoto obliquo a $+\infty$. Cominciamo con il calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = +\infty$$

e quindi non c' è asintoto obliquo a $+\infty$.

(6) La funzione $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$ è definita per $x \neq 2$, quindi $\text{Dom} \frac{x^2 - 3}{x - 2} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Dato che

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 3}{x - 2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 3}{x - 2} = -\infty$$

concludiamo che la retta $x = 2$ è un asintoto verticale. Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3}{x - 2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3}{x - 2} = -\infty$$

e quindi non ci sono asintoti orizzontali.

Cerchiamo eventuali asintoti obliqui. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 2x} = 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 2x}$$

Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 3}{x - 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x - 2} = 0$$

¹limite notevole n. (11) nelle note del 16/11/03

e analogamente

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 3}{x - 2} - x \right) = 0$$

Quindi la retta $y = 1x + 0$, cioè la retta $y = x$, è un asintoto obliquo sia a $+\infty$ che a $-\infty$.

(7) La funzione $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$ è definita per $x \neq 1$. Quando $x \rightarrow 1^\pm$ allora $\frac{x^2}{1-x} \rightarrow \mp\infty$. In particolare $x = 1$ è un asintoto verticale. La retta $y = -x - 1$ è asintoto obliquo a $\pm\infty$

(8) La funzione $f(x) = \sqrt{\frac{x^2(x-1)}{x+1}}$ è definita in $(-\infty, -1) \cup 0 \cup [1, +\infty)$. Ha asintoto verticale $x = -1$. Ha asintoto obliquo $y = x - 1$ a $+\infty$ e asintoto obliquo $y = 1 - x$ a $-\infty$.