

ISTITUZIONI DI MATEMATICHE

Corso di Laurea in Scienze Ambientali - A.A.2003-2004

Riassunto sui limiti ed esercizi per il periodo 20/11/03 - 25/11/03

Limiti notevoli.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(1+x)}{x} = 1$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{se } a > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \lg x = +\infty$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0^+} \lg x = -\infty$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \quad \forall a > 1, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

equivalentemente:

$$(9\text{bis}) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0 \quad \forall a > 1, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lg x)^\alpha}{x^\beta} = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta > 0$$

equivalentemente:

$$(10\text{bis}) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\beta}{(\lg x)^\alpha} = +\infty \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta > 0$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow 0} |x|^\beta |\lg |x||^\alpha = 0 \quad \forall \beta > 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(12\text{bis}) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \alpha x)^{\frac{1}{x}} = e^\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty \quad \text{dove } \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow \pi^-} \cot x = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \cot x = +\infty \quad \text{dove } \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

(15) Se $P(x) = a_p x^p + \dots + a_0$ è un polinomio di grado p e $Q(x) = b_q x^q + \dots + b_0$

è un polinomio di grado q allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0 & \text{se } q > p \\ a_p/b_q & \text{se } q = p \\ +\infty & \text{se } q < p \end{cases}$.

Sappiamo inoltre che le funzioni $\sin x$, $\cos x$, a^x , x^α , $\lg x$ sono *continue* nel loro insieme di definizione; quindi $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$, etc, etc. Occorre anche ricordare i teoremi sui limiti delle somme, dei prodotti, dei quozienti etc.

Calcolare i seguenti limiti:

$$0) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 2x^2}{x^5 + 10x^4}$$

$$0.5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$$

Suggerimento: moltiplicare e dividere per $2x$. Quanto vale $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x}$? (Porre $t = 2x$).

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} 5^x - x^4$$

Suggerimento: cercate di mettere in evidenza 5^x ; utilizzate poi i limiti notevoli (4) e (9bis).

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \lg x - \sqrt{x}$$

Suggerimento: cercate di mettere in evidenza \sqrt{x} ; utilizzate poi (10).

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lg \sqrt{x+1}}{x}$$

Suggerimento: utilizzare una nota proprietà dei logaritmi e (10).

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg \sqrt{x+1}}{x}$$

Suggerimento: utilizzare una nota proprietà dei logaritmi e (3).

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lg(x^2 + 1)}{2x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1 - e^{2x}}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$$

Suggerimento: pensate a come avete risolto 0.5)...

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\operatorname{tg} 2x}$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{1 - \cos x}$$

Suggerimento: moltiplicare e dividere per $(1 + \cos x)$.

Risposte 0): 0. 0.5): 2. 1): $+\infty$. 2): $-\infty$. 3): 0. 4): $1/2$. 5): 0. 6): 0. 7): $3/2$. 8): 2. 9): 1. 10): 2.