ISTITUZIONI DI MATEMATICHE

Corso di Laurea in Scienze Ambientali - A.A.2003-2004

Esercizi su derivate, massimi e minimi, grafici di funzioni
2 Dicembre 2003

Applicando il Teorema di De L'Hospital calcolare i seguenti limiti:

(1) $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - 1}{2 \sin x - \sqrt{2}}$

(2) $\lim_{x \to 1} \frac{3x^5 - 4x^4 + x}{x^2 - 2x + 1}$

(3) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 + \log(1 - x)}{\tan x - x}$

(4) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(1 + 2e^x)}{\sqrt{1 + x^2}}$

(5) $\lim_{x \to +\infty} x^2 \log \cos \frac{1}{x}$ [1]

(6) La funzione $f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x + 1$, con dominio l'intervallo $[-\frac{3}{2}, 3]$, è continua in un intervallo chiuso e limitato; per il Teorema di Weistrass ammette quindi massimo e minimo; vi si chiede di determinarli. [2]

(7) La funzione $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$ è continua in $[-\frac{1}{2}, 2]$. Si può verificare (date per buona quest' informazione) che *non* è derivabile in ± 1. Determinare il massimo ed il minimo della funzione nel suo insieme di definizione.

(8) Studiare il grafico della funzione $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 5}$.

(9) Studiare il grafico della funzione $f(x) = e^{-x^2}$.

[1] Suggerimento per (5): questa è una forma indeterminata del tipo $\infty \cdot 0$; per applicare De L'Hospital dobbiamo ricondurci ad una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$. Osserviamo però che vale l'identità :

$$x^2 \log \cos \frac{1}{x} = \frac{\log \cos \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}$$

e che a destra c' è una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Applicate quindi De L'Hospital al membro a destra dell'identità precedente.

[2] Un'equazione del tipo $x^4 + \alpha x^2 + \beta = 0$ si risolve ponendo $t = x^2$.