Geometria Analitica. a.a. 05/06.
Prova scritta del 22/02/06

Esercizio 1. Consideriamo lo spazio proiettivo numerico $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ con coordinate omogenee x_0, x_1, x_2, x_3. Consideriamo lo spazio affine $\mathcal{A}^3(\mathbb{R})$ e l'applicazione di passaggio a coordinate omogenee:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R}) \ni (x_1, x_2, x_3) \xrightarrow{j_0} [1, x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \setminus H_0 \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{R}).$$

Si considerino le rette affini r e s di equazioni

$$r : x_1 + 2x_2 + x_3 = x_1 - x_3 + 5 = 0\,, \quad s : 2x_1 - x_2 + 3 = x_1 - x_2 + 2 = 0$$

e siano $\overline{r}$, $\overline{s}$ le loro chiusure proiettive. Determinare l'equazione cartesiana del piano proiettivo passante per il punto $[1, 0, 0, 1]$ e per i punti $\overline{r} \cap H_0$, $\overline{s} \cap H_0$.

Esercizio 2. Si consideri la matrice $A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1/2 & 3 & -1/2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ e l'operatore L_A : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Studiare la diagonalizzabilità di L_A. Determinare una matrice invertibile C *ed* una matrice triangolare T tali che $C^{-1}AC = T$.

Esercizio 3. Piano affine con riferimento $RA(O, \underline{i}, \underline{j})$ e coordinate associate (x, y).
1. Verificare che le coniche di equazioni

$$2x^2 + 2y^2 + 4xy = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2xy + \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y - 1 = 0$$

sono degeneri.
2. Determinare equazioni cartesiane delle rette in cui si decompongono.

Esercizio 4. Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ con coordinate omogenee x_0, x_1, x_2, x_3 è data la quadrica Q di equazione

$$-X_0^2 + 2X_1X_2 + 2X_1X_3 + 2X_2X_3 = 0$$

1. Determinare la forma canonica proiettiva della quadrica.
2. Sia Q_0 la quadrica affine di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \setminus H_0$ ottenuta a partire da Q per deomogeneizzazione. Classificare Q_0.

Esercizio 5. Sia $V = \mathbb{R}^4$ con prodotto scalare canonico $<\,,\,>$. Sia $P \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ l'operatore L_A con

$$A := \begin{vmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} \tag{1}$$

Sia $b : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ l'applicazione definita da

$$b(\underline{v}, \underline{u}) :=< P\underline{u}, \underline{v} >$$

1. Verificare che b è un prodotto scalare.
2. Determinare la segnatura di b.
3. Sia W il piano di equazioni cartesiane $x_1 - x_3 = 0\,, \quad x_2 - x_4 = 0\,.$ Sia b' : $W \times W \to \mathbb{R}$ la restrizione di b a W: determinare gli indici di nullità, positività e negatività di b'.