

Matematica secondo corso

Proff. P. Papi, P. Piazza

Compito a casa del 28/4/2017. Sketch delle soluzioni

Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$(1) \quad \int \frac{x^2 - x + 2}{(x^2 + 1)(x - 1)} dx; \quad \int \frac{x^4 + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx$$

Soluzione. Scriviamo

$$\frac{x^2 - x + 2}{(x^2 + 1)(x - 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B(2x) + C}{x^2 + 1}$$

e imponiamo che sia un'identità. Otteniamo le condizioni

$$A + 2B = 1, \quad C - 2B = -1, \quad A - C = 2$$

e quindi $A = 1$, $B = 0$, $C = -1$. Integrando l'espressione che ne risulta,

$$\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x^2 + 1}$$

otteniamo la risposta all'esercizio:

$$\int \frac{x^2 - x + 2}{(x^2 + 1)(x - 1)} dx = \log|x - 1| - \arctg x + c.$$

Il secondo integrale in (1) si risolve in maniera simile, una volta fatta la divisione euclidea; infatti $x^4 + 1 = (x + 1)(x^3 - x^2 + x - 1) + 2$ che ci dà

$$\frac{x^4 + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} = (x + 1) + \frac{2}{x^3 - x^2 + x - 1} \equiv (x + 1) + \frac{2}{(x^2 + 1)(x - 1)}.$$

Quindi

$$\int \frac{x^4 + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx = \int (x + 1) dx + \int \frac{2}{(x^2 + 1)(x - 1)} dx;$$

il primo integrale a destra è immediato ed il secondo si calcola con il metodo già utilizzato nel primo integrale di (1).

$$(2) \quad \int \frac{1 + e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

Soluzione. Facendo la sostituzione

$$\sqrt{x} = t, \quad x = t^2, \quad dx = 2t dx,$$

applicando la formula di sostituzione, calcolando il risultante integrale in t e ritornando poi alla variabile x otteniamo

$$\int \frac{1 + e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + 2e^{\sqrt{x}} + c.$$

$$(3) \quad \int \sqrt{\sin x} \cos^3 x dx$$

Soluzione. Osserviamo che l'integrale si può scrivere come

$$\int \sqrt{\sin x} \cos^2 x (\cos x) dx$$

Facendo la sostituzione

$$\sin x = t, \quad \text{che dà} \quad dt = \cos x dx$$

otteniamo

$$\int \sqrt{t}(1-t^2) dt$$

che è di facile integrazione. La risposta finale è

$$\frac{2}{3} \sin x \sqrt{\sin x} - \frac{2}{7} \sin x \sqrt{\sin x} \sin^2 x + c.$$

$$(4) \quad \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx, \quad \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}} dx, \quad \int \frac{3x+2}{4x+5} dx$$

Soluzione. Soluzioni disponibili nel testo di esercizi ¹: esercizi 4.11; 4.31; 4.37.

$$(5) \quad \int \frac{1}{3x^2+2} dx, \quad \int x^2 \sin x dx, \quad \int x^2 e^x dx, \quad \int \frac{\log(1+x)}{x^2} dx$$

Soluzione. Soluzioni disponibili nel testo di esercizi: esercizi 4.39, 4.69, 4.84.

$$(6) \quad \int \frac{x+3}{x^2-6x} dx, \quad \int x^5 e^{x^2} dx$$

Soluzione. Soluzioni disponibili nel testo di esercizi: esercizi 4.96, 4.105

¹P. Marcellini - C. Sbordone: *Esercitazioni di Matematica, Volume 1, Parte Seconda*