Geometria I. Gruppo A-L. Anno accademico 1999/2000.

Compito a casa per il 29/11/99.

Esercizio (dato il 22/11/99)
Verificare che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

è associata, nella base canonica, ad un operatore $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di proiezione su un piano π parallelamente ad una retta r, determinando esplicitamente π e r. (Per capire cosa dovete verificare interrogatevi su come opera una tale proiezione sui vettori del piano e su quelli della retta. Analogamente: come si verifica che una certa matrice rappresenta un operatore di simmetria rispetto ad un piano parallelamente ad una retta?).

Soluzione. È stata già accennata in classe; ecco i dettagli. Sia $F_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare

$$\mathbb{R}^3 \ni \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \longrightarrow A \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 .$$

Più esplicitamente:

$$F_A(x^1, x^2, x^3) = (x^1, 2x^1 - x^2 - 2x^3, -x^1 + x^2 + 2x^3) .$$

Abbiamo visto che se $\underline{e}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$ allora $M_{\underline{e},\underline{e}}(F_A) = A$ (basta calcolare $F_A(1,0,0), F_A(0,1,0), F_A(0,0,1)$). Dobbiamo allora verificare che F_A è la proiezione su un piano parallelamente ad una retta. Abbiamo visto che, in generale, una tale proiezione lascia invariati i vettori del piano mentre manda i vettori della retta nel vettore nullo. Consideriamo allora $W_1 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, F_A(\underline{x}) = \underline{0}\}$ e $W_2 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, F_A(\underline{x}) = \underline{x}\}$. W_1 è semplicemente il nucleo di F_A; è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$. D'altra parte anche W_2 è un sottospazio vettoriale; infatti, denotata con Id l'applicazione identità di $\mathbb{R}^3$ abbiamo $W_2 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, F_A(\underline{x}) - \underline{x} = \underline{0}\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, F_A(\underline{x}) - \mathrm{Id}(\underline{x}) = \underline{0}\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, (F_A - \mathrm{Id})(\underline{x}) = \underline{0}\} = N(F_A - \mathrm{Id})$, che è sicuramente un sottospazio. Osserviamo che se $\underline{v} \in W_1 \cap W_2$ allora $\underline{v} = F_A(\underline{v})$ perché $\underline{v} \in W_2$ *e* $F_A(\underline{v}) = \underline{0}$ perché $\underline{v} \in W_1$; ne segue che $\underline{v} = \underline{0}$ e quindi che $W_1 \cap W_2 = \underline{0}$. *Supponiamo ora che W_1 sia una retta e che W_2 sia un piano.* Allora, *sotto questa ipotesi*, per quanto sopra si avrebbe: $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$, $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^3$, $\underline{x} = \underline{x}_1 + \underline{x}_2$ con $\underline{x}_1 \in W_1$, $\underline{x}_2 \in W_2$. Inoltre

$$F_A(\underline{x}) \equiv F_A(\underline{x}_1 + \underline{x}_2) = F_A(\underline{x}_1) + F_A(\underline{x}_2) = \underline{0} + \underline{x}_2 = \underline{x}_2$$

e questo dimostrerebbe proprio che F_A è la proiezione su W_2 parallelamente a W_1. Dobbiamo quindi decidere se è vero che W_1 è una retta e W_2 è un piano. Ciò si riduce alla soluzione di due sistemi lineari omogenei; la risposta è affermativa e l'esercizio è completamente risolto.

Definizione. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e supponiamo che esistano 2 sottospazi W_1, W_2 tali che $V = W_1 \oplus W_2$. Ne segue, per definizione di somma diretta, che ogni vettore dello spazio $\underline{w} \in V$ si decompone in maniera *unica* come la somma $\underline{v} = \underline{w}_1 + \underline{v}_2$ con $\underline{w}_1 \in W_1$, $\underline{w}_2 \in W_2$. Definiamo l'operatore di *proiezione su W_1 parallelamente a W_2*

come l'operatore $P_1 : V \longrightarrow V$ che associa al vettore $\underline{w}$ il vettore $\underline{w}_1$: $P_1(\underline{w}) := \underline{w}_1$. La definizione è formalmente la stessa utilizzata per il caso $V = \mathbb{R}^3$, $W_1 = r$, $W_2 = \pi$. P_1 è un operatore lineare; la dimostrazione è identica a quella data per il caso $V = \mathbb{R}^3$, $W_1 = r$, $W_2 = \pi$.

Esercizio 1. Definire l'operatore P_2 di proiezione su W_2 parallelamente a W_1, l'operatore S_1 di simmetria rispetto a W_1 parallelamente a W_2 e l'operatore S_2 di simmetria rispetto a W_2 parallelamente a W_1. Verificare che in $\mathrm{End}(V)$ si ha:

$$(P_1)^2 = P_1\,; \quad (P_2)^2 = P_2\,; \quad P_2 = \mathrm{Id} - P_1\,; \quad S_1 = \mathrm{Id} - 2P_2\,; \quad S_2 = 2P_2 - \mathrm{Id}\,.$$

Osservazione. Come nel caso $V = \mathbb{R}^3$ possiamo porci il seguente problema: una volta assegnati W_1 e W_2 trovare la matrice associata ad una (e quindi ognuna) di queste applicazioni nella base canonica. Ci sono tre metodi per risolvere questo tipo di esercizio: ve li richiamo nel caso $V = \mathbb{R}^3$, $W_1 = r$, $W_2 = \pi$. Supponiamo di voler trovare $M_{\underline{e}}(P_1)$ (vi ricordo la notazione $M_{\underline{e}}(F) := M_{\underline{e},\underline{e}}(F)$).
Primo metodo. Fissiamo una base $\underline{f} = \{\underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ con il primo vettore $\underline{f}_1 \in r$ e gli altri due in π. Utilizzando Cramer determiniamo il primo vettore nella decomposizione $\underline{e}_j = \alpha_j \underline{f}_1 + (\beta_j \underline{f}_2 + \gamma_j \underline{f}_3)$....etc.
Secondo metodo. Troviamo $M_{\underline{f}}(P_1)$, il che è molto facile, ed utilizziamo la formula che lega le matrici associate ad una stessa applicazione lineare in basi diverse (Sernesi pag. 161, formula [13.1]).
Terzo metodo. Determiniamo $M_{\underline{e}}(P_2)$ utilizzando la geometria affine. Più precisamente: riguardiamo $\mathbb{R}^3$ sia come spazio vettoriale che come spazio affine numerico A^3. Nel primo fissiamo la base canonica; nel secondo, il riferimento affine canonico.
Per trovare ad esempio $P_2(x^1, x^2, x^3)$ consideriamo le equazioni parametriche della retta affine per il punto Q di coordinate affini $\underline{x} = (x^1, x^2, x^3)$ e di direzione $W_1 = r$. Il piano π può essere considerato sia come piano vettoriale che come piano affine per l'origine. L'intersezione della retta affine per Q e di direzione W_1 con il piano π è allora un punto $I_{\underline{x}}$ dello spazio affine A^3. (Le coordinate di $I_{\underline{x}}$ sono esplicitamente determinabili a partire da quelle di (x^1, x^2, x^3) e dalla conoscenza di r e π.) Le coordinate di questo *punto* sono anche le coordinate del *vettore* $\overline{OI_{\underline{x}}}$ nella base canonica. Sia $\underline{x}_2 = \overline{OI_{\underline{x}}}$ e sia $\underline{x}_1 = \overline{I_{\underline{x}}Q}$. Da quanto sopra e dal fatto che A^3 è uno spazio affine su $\mathbb{R}^3$ abbiamo (pensateci):

$$(x^1, x^2, x^3) = \underline{x}_1 + \underline{x}_2 \qquad \underline{x}_1 \in r\,, \underline{x}_2 \in \pi.$$

Ma allora $P_2(x^1, x^2, x^3)$ è proprio dato dalle coordinate di $I_{\underline{x}}$; dall'espressione di $P_2(x^1, x^2, x^3)$ otteniamo la matrice cercata. **Fine osservazione**.

Nel caso in cui la dimensione di W sia maggiore di 3 possiamo ancora utilizzare questi 3 metodi per determinare le matrici associate a proiezioni e simmetrie in opportune basi. Cominciamo con un caso semplice:

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}^4$, $\underline{e}$ la base canonica, (x^1, x^2, x^3, x^4) le coordinate associate. Siano W_1 e W_2 i piani di equazioni cartesiane rispettivamente

$$\begin{cases} x^2 = 0 \\ x^3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^1 = 0 \\ x^4 = 0 \end{cases}$$

Scrivere la matrice $M_{\underline{e}}(S_1)$ associata all'operatore S_1 di simmetria rispetto a W_1 parallelamente a W_2.

Suggerimento: utilizzare l'analogo 4-dimensionale del primo e del secondo metodo.

Esercizio 2. $V = \mathbb{R}^4$ con base canonica fissata. Consideriamo il sottospazio W_1 di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} X^1 + X^2 - X^3 = 0 \\ X^2 + X^3 - X^4 = 0 \end{cases}$$

ed il sottospazio $W_2 =< (1, 0, -1, 0), (2, 0, 0, 2) >$.
2.1 Determinare equazioni cartesiane per W_2.
2.2 Verificare che $\mathbb{R}^4 = W_1 \oplus W_2$.
2.3 Determinare $M_{\underline{e}}(P_1)$. (Se avete tempo cercate di risolvere questa terza parte dell'esercizio utilizzando ognuno dei metodi illustrati.)

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}^4$ come sopra e sia $P : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'operatore definito dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verificare che P è un operatore di proiezione, specificando su quale sottospazio W_1 e parallelamente a quale sottospazio W_2 stiamo facendo la proiezione.
Suggerimento: procedete come nella soluzione dell'Esercizio del 22/11/99 riportata all'inizio.