Geometria I. Gruppo A-L. Anno accademico 1999/2000.

Compiti per il fine settimana del 29-31/10/99

Attenzione il 2/11/99 ore 9-11 ci sarà lezione di Geometria 1.
Alle ore 11 sarò a disposizione per chiarimenti e spiegazioni.

Esercizio 1. Vero o Falso: (i) In $\mathbb{R}^4$ esistono 6 vettori linearmente indipendenti. (ii) In $\mathbb{R}^6$ esistono 4 vettori linearmente indipendenti. (iii) Esistono 6 vettori in $\mathbb{R}^4$ che generano $\mathbb{R}^4$. (iv) Esistono 4 vettori in $\mathbb{R}^6$ che generano $\mathbb{R}^6$. Giustificare le risposte.

Esercizio 2. Sia $\phi \in \mathbb{R}$ e si consideri il sistema

$$\begin{cases} (\cos\phi)x + (\sin\phi)y = 1 \\ (-\sin\phi)x + (\cos\phi)y = \sqrt{3} \end{cases}$$

(i) Verificare che $\forall \phi \in \mathbb{R}\ \exists$ unica la soluzione $(\overline{x}_\phi, \overline{y}_\phi)$ del sistema.
(ii) Sia $\phi \in (0, 2\pi)$ (quindi $0 < \phi < 2\pi$). Formulare con un simbolismo matematico compatto la segente
Proposizione. Ad angoli diversi corrispondono soluzioni diverse.
(iii) Questa Proposizione è vera o falsa? Se è vera dimostrarla; se è falsa fornite un controesempio.
(iv) Si consideri l'insieme
$\mathcal{S}_{(0,2\pi)} = \{(\overline{x}_\phi, \overline{y}_\phi) \in \mathbb{R}^2 \ \mid\ (\overline{x}_\phi, \overline{y}_\phi)$ è la soluzione del sistema corrispondente a $\phi \in (0, 2\pi)\}$.
Descrivere geometricamente l'insieme $\mathcal{S}_{(0,2\pi)} \subset \mathbb{R}^2$.
Definire l'insieme $\mathcal{S}_{[0,2\pi]}$ e descriverlo geometricamente (si ricorda che se $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ allora $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$). L'esercizio proposto definisce in maniera naturale un'applicazione *iniettiva* $f : (0, 2\pi) \to \mathcal{S}_{(0,2\pi)}$ ed un'applicazione *non* iniettiva $h : [0, 2\pi] \to \mathcal{S}_{[0,2\pi]}$. Definire queste applicazioni.

Esercizio 3. Sia $\phi \in \mathbb{R}$ con $0 \le \phi < 2\pi$, $\phi \ne \frac{\pi}{4}, \phi \ne \frac{5}{4}\pi$. Denotiamo con D l'insieme di tali ϕ.
Si consideri il sistema

$$\begin{cases} (\cos\phi)x + (\sin\phi)y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

(i) Stabilire se $\forall \phi \in D\ \exists$ unica la soluzione $(\overline{x}_\phi, \overline{y}_\phi)$ del sistema.
(ii) Determinare due angoli diversi ai quali tuttavia corrispondono 2 soluzioni uguali.
(iii) Usando l'insieme D e l'insieme $\mathcal{S}_D$ delle soluzioni del sistema al variare di $\phi \in D$ definire l'applicazione $g : D \to \mathcal{S}_D$ analoga a quella di (iv) Esercizio 1. L'applicazione g è iniettiva ?

Esercizio 4. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Si consideri la matrice $n \times n$

$$A(a,b,n) = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & \dots & b \\ b & a & b & \dots & \dots & b \\ \vdots & b & a & \dots & \dots & b \\ \vdots & \vdots & b & \dots & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & b \\ b & b & b & \dots & \dots & a \end{pmatrix}.$$

Definiamo $M(a,b,n) = \det A(a,b,n)$. Dare una formula per il numero $M(a,b,n)$ che coinvolga a, b e n.
Suggerimenti:
(1) Verificare che $M(a,b,1) = a$, $M(a,b,2) = (a+b)(a-b)$. Trovare una formula di questo tipo per $M(a,b,3)$. Sulla base di queste 3 formule provate a congetturare la formula generale per $M(a,b,n)$.
(2) Per dimostrare rigorosamente la vostra congettura può essere utile osservare che

$$M(a,b,n) = \det \begin{pmatrix} a & b-a & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b & a-b & b-a & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & a-b & b-a & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & a-b & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & b-a \\ b & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & a-b \end{pmatrix}$$

Perchè la formula appena scritta è vera ? Sviluppate quest'ultimo determinante secondo la prima riga usando la formula di Laplace ....

Esercizio 5. Utilizzando la nozione di determinante, verificare che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

è invertibile e calcolare A^{-1}.

Esercizio 6. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^6$ si consideri il sottospazio

$$W = \{(x^1, \dots, x^6) \ \mid \ x^1 + 3x^3 + 5x^5 + x^6 = 0\}$$

Determinare una base di W.

Esercizio 7. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ è dato il sottospazio

$$W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ \mid \ \begin{cases} x + 3y - 2z + 4t = 0 \\ x + 4y - 3z + 5t = 0 \\ x + 2y - z + 3t = 0 \end{cases} \}.$$

Determinare la dimensione di W e 3 basi di W che siano *distinte* (e non ottenibili l'una dall'altra per mezzo di permutazioni e/o moltiplicazioni per scalari).

Esercizio 8. Sia $V = \mathbb{R}^3$. Verificare che i vettori

$$\underline{f}_1 = (2,2,2), \ \ \underline{f}_2 = (-1,2,1), \ \ \underline{f}_3 = (-1,-2,1)$$

costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$. Sia $\underline{u} = (3,-4,0)$. Determinare le coordinate di $\underline{u}$ rispetto alla base $\underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3$.