Geometria I. Gruppo A-L. Anno accademico 1999/2000.

Compito pomeridiano del 24/01/00

Esercizio 1. Piano euclideo E su $(V, < , >)$. Riferimento cartesiano (quindi ortonormale) $O\,\underline{i}\,\underline{j}$ fissato. Coordinate associate (x, y). Consideriamo la retta r per il punto $P_0(5, 1)$ e di parametri direttori $(1, -1)$.

Sia $O'(1, 1)$ e siano $\underline{i}'$, $\underline{j}'$ ottenuti ruotando rispettivamente $\underline{i}$, $\underline{j}$ di un angolo di $\pi/4$ nel verso positivo definito dalla base $\{\underline{i}, \underline{j}\}$. Consideriamo il riferimento $O'\underline{i}'\underline{j}'$ con coordinate (x', y'). Determinare le formule di cambiamento di coordinate, dalle (x, y) alle (x', y') e viceversa. Determinare inoltre l'equazione, nelle coordinate (x', y'), della retta s per P_0 ortogonale ad r.

Esercizio 2. Spazio euclideo tridimensionale E su $(V, < , >)$. Riferimento cartesiano $O\,\underline{i}\,\underline{j}\,\underline{k}$ con coordinate associate (x, y, z).
Sono dati il piano σ e la retta r di equazioni rispettivamente

$$2x + 2y + z = 2 \qquad\qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 2z \end{cases}$$

Si proietti r ortogonalmente su σ. Sia s la retta proiezione ortogonale. Si consideri la retta t del piano σ passante per $P_0 = r \cap s$ ed ortogonale a s. Si trasli infine questa retta t nella direzione ortogonale a σ fino ad ottenere due rette h_1, h_2 tali che

$$d(t, h_1) = 2 = d(t, h_2).$$

Scrivere le equazioni cartesiane di s, t, h_1, h_2. Fate preliminarmente una figura che illustri la posizione di queste 4 rette.[1]

Esercizio 3. Verificare che la convessità è una proprietà affine.

Esercizi per casa.

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}_2[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi nell'indeterminata x a coefficienti reali di grado ≤ 2. Definiamo una forma bilineare simmetrica $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ ponendo

$$b(p, q) = p(0)q(0) + p(\frac{1}{2})q(\frac{1}{2}) + p(1)q(1)$$

1) Verificare che b definisce un prodotto scalare.
2) Calcolare $||2 + x||$.
3) Scrivere la matrice di questo prodotto scalare nella base $\underline{e} = \{1, x, x^2\}$ di V.
4) Scrivere equazioni cartesiane, nelle coordinate associate alla base $\underline{e}$, per il sottospazio W ortogonale al vettore $1 - x$.
5) Trovare una base ortogonale di W.

[1] La distanza fra due rette parallele r e r' è definita come la distanza $d(P, r')$ con P un qualsiasi punto di r.

6) Si consideri in $V = \mathbb{R}_2[x]$, con la base $\underline{e} = \{1, x, x^2\}$ fissata, il prodotto scalare $\bullet$ definito dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sia T l'operatore lineare *simmetrico* associato alla forma bilineare $b(\ ,\ )$ e al prodotto scalare $\bullet$. Calcolare $T(1 + x + x^2)$.

Per l'esercizio che segue è opportuno leggere §19.4.1 in Sernesi (noi abbiamo fatto il caso bidimensionale).

Esercizio 2. Spazio euclideo tridimensionale E su $(V, <\ ,\ >)$. Riferimento cartesiano $O\,\underline{i}\,\underline{j}\,\underline{k}$ con coordinate associate (x, y, z). Sia Q l'insieme dei punti di E le cui coordinate soddisfano

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 6z - 3 = 0.$$

1) Verificare che Q è una sfera determinandone il centro ed il raggio.

2) Verificare che il piano π di equazione

$$x + 3y + 4z = 0$$

è secante Q (e cioè l'intersezione è non vuota e non uguale ad un punto).

3) Determinare centro e raggio della circonferenza $\mathcal{C}$ ottenuta intersecando Q con π : $\mathcal{C} = Q \cap \pi$.