Geometria I. Gruppo A-L. Anno accademico 1999/2000.

Compito pomeridiano del 22/11/99 + Esercizi vari

Esercizio 1. Stabilire se la seguente proposizione è vera o falsa:
Un'applicazione lineare $S : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *con* $n > m$ *non può essere iniettiva.*
Giustificate la vostra risposta.

Esercizio 2. Stabilire se la seguente proposizione è vera o falsa:
Un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *con* $n < m$ *non può essere suriettiva.*
Giustificate la vostra risposta.

Esercizio 3. $\mathbb{R}^2$ con base canonica. $\mathbb{R}^3$ con base canonica.
Determinare l'espressione in coordinate di un'applicazione lineare $F \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ che trasformi il vettore $(1,1) \in \mathbb{R}^2$ nel vettore $(1,1,1) \in \mathbb{R}^3$ ed abbia nucleo banale (quindi *iniettiva*). Determinare equazioni parametriche e cartesiane per il sottospazio immagine della vostra F. (La risposta non è, ovviamente, unica). Rifate questo esercizio imponendo sempre che F trasformi $(1,1)$ in $(1,1,1)$ ma richiedendo ora che il nucleo sia non banale. Fate delle figure che illustrino le vostre costruzioni.

Esercizio 4.

Siano V, W, Z spazi vettoriali e $T\colon V \longrightarrow W$, $S\colon W \longrightarrow Z$ due applicazioni lineari. Verificare che se T è non-iniettiva allora la composizione $S \circ T$ è non-iniettiva *per ogni* $S \in \mathrm{Hom}(W, Z)$ (questo è molto facile da verificare). Supponiamo ora che S sia non-iniettiva: è vero che $S \circ T$ è non-iniettiva *per ogni* $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$? Se la risposta è *si* dimostratelo. Se è *no* elaborate una spiegazione e fornite un esplicito controesempio. Cercate di ragionare geometricamente utilizzando il sottospazio nucleo; provate con $V = \mathbb{R}^2$, $W = Z = \mathbb{R}^3$, S una proiezione su un piano parallelamente ad una retta (non è iniettiva), T l'applicazione iniettiva che avete costruito nell'Esercizio 2... Fate delle figure.

Esercizio 5. $V = \mathbb{R}^3$ con base canonica. Dire se l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

è biunivoca ed in caso affermativo determinare l'espressione in coordinate dell'inversa $T^{-1} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

Esercizio 6 $V = \mathbb{R}^3$ con base canonica $\underline{e}$. Spiegare perché esiste ed è unica l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(1,1,1) = (2,3,2), \quad F(0,1,1) = (1,3,2), \quad F(0,1,-1) = (1,1,-2).$$

Determinare $M_{\underline{e},\underline{e}}(F)$.

Esercizio 7. (da fare a casa)
Verificare che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

è associata, nella base canonica, ad un operatore $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di proiezione su un piano π parallelamente ad una retta r, determinando esplicitamente π e r. (Per capire cosa dovete verificare interrogatevi su come opera una tale proiezione sui vettori del piano e su quelli della retta. Analogamente: come si verifica che una certa matrice rappresenta un operatore di simmetria rispetto ad un piano parallelamente ad una retta?).

Esercizio 8. (di ripasso, da fare a casa)
Sia $V = \mathbb{R}^4$ con base canonica $\mathbb{E}$ fissata e coordinate associate (x^1, x^2, x^3, x^4). Sia W il sottospazio di V di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x^1 - x^4 = 0 \\ x^2 + x^3 = 0 \\ x^1 + 2x^2 + 2x^3 - x^4 = 0 \end{cases}$$

Determinare una base di W. Scrivere le equazioni cartesiane di un sottospazio W' di $\mathbb{R}^4$ che abbia la proprietà che $\mathbb{R}^4 = W \oplus W'$.