Geometria I. Gruppo A-L. Anno accademico 1999/2000.

Compito pomeridiano del 20/12/99.

Breve riassunto sulle forme bilineari. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e $\underline{v} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$ una base di V. Sia $b : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica. Allora è definita la matrice associata a $b(\ ,\ )$ nella base fissata; è la matrice *simmetrica*

$$A_b^{\underline{v}} := (b(\underline{v}_i, \underline{v}_j)) .$$

L'espressione della forma bilineare nelle coordinate fissate dalla base $\underline{v} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$ è data da

$$b(x^1\underline{v}_1 + \cdots + x^n\underline{v}_n\, ,\, y^1\underline{v}_1 + \cdots + y^n\underline{v}_n) = (x^1, \ldots, x^n) \cdot A_b^{\underline{v}} \cdot \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} . \tag{1}$$

Viceversa, data una matrice simmetrica $A = (a_{i\,j})$ possiamo definire una forma bilineare simmetrica $b_A : V \times V \to \mathbb{R}$ ponendo $b_A(x^1\underline{v}_1 + \cdots + x^n\underline{v}_n\, ,\, y^1\underline{v}_1 + \cdots + y^n\underline{v}_n) =$ (membro a destra della formula (1) ma con A al posto di $A_b^{\underline{v}}$). Si ha allora

$$b_A(x^1\underline{v}_1 + \cdots + x^n\underline{v}_n\, ,\, y^1\underline{v}_1 + \cdots + y^n\underline{v}_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i\,j} x^i y^j . \tag{2}$$

Si verifica immediatamente che la matrice associata a $b_A(\ ,\ )$ nella base fissata è proprio A. Consideriamo in particolare $V = \mathbb{R}^n$ con la base canonica. Possiamo allora dare una forma bilineare simmetrica semplicemente assegnando una matrice simmetrica A e considerando

$$b_A(\underline{x}, \underline{y}) = (x^1, \ldots, x^n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i\,j} x^i y^j .$$

Possiamo anche definire una forma bilineare assegnando direttamente la sua espressione in coordinate:

$$b(\underline{v}, \underline{w}) := \sum_{i,j=1}^{n} b_{i\,j} v^i w^j ;$$

è chiaro che in $\mathbb{R}^n$ questa è una forma bilineare dal momento che la possiamo scrivere come

$$b(\underline{v}, \underline{w}) = (v^1, \cdots, v^n) \cdot B \cdot \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ \vdots \\ w^n \end{pmatrix} \text{ con } B := (b_{i\,j}) .$$

La matrice associata a questa forma bilineare nella base canonica è proprio B. $b(,)$ è simmetrica sse $b_{i\,j} = b_{j\,i}\ \forall i,j$.

Associata ad una forma bilineare simmetrica $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ abbiamo una forma quadratica $q(\underline{x}) = b(\underline{x},\underline{x})$ che è un polinomio omogeneo di secondo grado nelle indeterminate $x^1,\dots,x^n$. Viceversa dato un tale polinomio

$$Q(x^1,\dots,x^n) = \sum_{i\le j} q_{i\,j} x^i x^j$$

possiamo definire una matrice simmetrica A ponendo $a_{i\,i} = q_{i\,i}$ e $a_{i\,j} = a_{j\,i} = q_{i\,j}/2$ se $i < j$. È allora immediato verificare che la forma bilineare b_A definita da questa matrice ha Q come forma quadratica associata. Questa forma bilineare è detta *forma bilineare polare di Q*.

Sia data una forma bilineare simmetrica $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ ed un sottospazio U di V: il sottospazio $U^\perp = \{\underline{w} \in V \,|\, b(\underline{w},\underline{u}) = 0\,\forall \underline{u} \in U\}$ si trova fissando una qualsiasi base $\{\underline{u}_1,\dots,\underline{u}_k\}$ di U ed osservando che

$$U^\perp = \{\underline{w} \in V \,|\, b(\underline{w},\underline{u}_j) = 0,\ j = 1,\dots,k.\}\,.$$

Quest'osservazione si applica in particolare al radicale $V^\perp$ (e di fatto questo è il caso che abbiamo visto in dettaglio a lezione). Si noti che b è non degenere sse $V^\perp = \{\underline{0}\}$.

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}^4$ con base canonica $\underline{e}$ fissata.

(1.1) Determinare la forma bilineare $b(,)$ polare della forma quadratica

$$Q(x^1,x^2,x^3,x^4) = 2x^1x^4 + 2x^2x^3$$

(1.2) Determinare il radicale $(\mathbb{R}^4)^\perp$. Dire se $b(,)$ è non degenere.

(1.3) Determinare il b-ortogonale $U^\perp$ di $U =< (1,0,0,0),(1,0,0,1) >$.

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}^4$ con base canonica $\underline{e}$ fissata. Sia $b(,)$ la forma bilineare definita da

$$b(\underline{x},\underline{y}) = x^1y^1 - x^2y^2 + x^3y^4 + x^4y^3\,.$$

(2.1) Determinare la matrice associata a b nella base canonica. Dire se b è simmetrica. Dire se b è non degenere.

(2.2) Dire se $(1,1,1,0)$ è un vettore isotropo per b. Determinare una base per $(1,1,1,0)^\perp$.

(2.3) Determinare una base diagonalizzante per b e la segnatura di b.

(2.4) Determinare due vettori isotropi per b.

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}^4$ con base canonica $\underline{e}$ fissata. Sia $b(,)$ la forma bilineare definita da

$$b(\underline{x},\underline{y}) = -x^2y^2 + x^3y^4 + x^4y^3.$$

(2.1) Scrivere la matrice associata a $b(,)$ nella base canonica. Dire se $b(,)$ è simmetrica.

(2.2) Verificare che $b(,)$ è degenere. Trovare una base per il sottospazio radicale $(\mathbb{R}^4)^\perp$.

(2.3) Determinare una base diagonalizzante per $b(,)$. Dire se questa base è univocamente determinata.

(2.4) Sia B la matrice di cui in (2.1). Determinare una matrice diagonale Δ ed una matrice invertibile $M \in GL_4(\mathbb{R})$ tali che

$$\Delta = M^t \cdot B \cdot M\,.$$

Dire se le matrici Δ ed M sono univocamente determinate.

Esercizio 4. Sia $(V, <\,,\,>)$ uno spazio vettoriale euclideo di dimensione 2. Supponiamo che sia stata fissata una base ortonormale $\{\underline{i}, \underline{j}\}$ in V. Siano (x, y) le coordinate associate. Determinare le equazioni cartesiane della retta ortogonale alla retta di equazione cartesiana

$$x + 2y = 0\,.$$

Esercizio 5. V come nell'Es. 4. Determinare la matrice associata nella base $\{\underline{i}, \underline{j}\}$ all'operatore di proiezione ortogonale sulla retta di equazione cartesiana

$$x - 3y = 0\,.$$

Esercizio 6. Sia $(V, <\,,\,>)$ uno spazio vettoriale euclideo di dimensione 3. Supponiamo che sia stata fissata una base ortonormale $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ in V. Siano (x, y, z) le coordinate associate. Determinare l'equazione cartesiana del piano π ortogonale alla retta r di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}.$$

Determinare una base ortonormale di V, $\underline{f} = \{\underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3\}$, con $\underline{f}_1 \in r$ e $\underline{f}_2, \underline{f}_3 \in \pi$.

Esercizio 7. $V = \mathbb{R}^3$ con base canonica e prodotto scalare

$$< \underline{x}, \underline{y} > := 3x^1y^1 + 4x^2y^2 + 3x^3y^3 + x^1y^3 + x^3y^1\,.$$

Si può verificare che questa forma bilineare definisce effettivamente un prodotto scalare (è definita positiva). Determinare l'equazione cartesiana del piano ortogonale alla retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x^1 - x^2 + x^3 = 0 \\ x^1 - x^2 - x^3 = 0 \end{cases}.$$

Esercizio 8. $V = \mathbb{R}^4$ con base canonica fissata e prodotto scalare canonico $\bullet$:

$$\underline{x} \bullet \underline{y} = x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3 + x^4y^4.$$

Determinare equazioni cartesiane per il sottospazio ortogonale all'iperpiano di equazione cartesiana $x^1 - x^2 + x^3 + x^4 = 0$. Determinare $U^\perp$ e $W^\perp$ con U il sottospazio generato dai vettori $\underline{u}_1 = (1, 1, 0, 1)\,, \underline{u}_2 = (0, 1, 1, 0)$ e W il sottospazio di equazioni

$$\begin{cases} x^1 - x^4 = 0 \\ x^2 + x^3 = 0 \end{cases}.$$