Geometria I. Gruppo A-L. Anno accademico 1999/2000.

Compito per il fine settimana del 19/11-22/11

Esercizio 1. Siano V e W spazi vettoriali ed $F \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Sia U un sottospazio vettoriale di V di dimensione k e sia $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_k\}$ una base di U. L'immagine di U tramite F è, per definizione, il sottoinsieme di W

$$F(U) = \{\underline{w} \in W \mid \exists \underline{u} \in U \text{ tale che } F(\underline{u}) = \underline{w}\}.$$

In parole: l'immagine di U tramite F è il sottoinsieme di W costituito dai trasformati dei vettori di U. Verificare che $F(U) =< F(\underline{u}_1), \ldots, F(\underline{u}_k) >$. Ne segue che $F(U)$ è un sottospazio di W di dimensione minore o uguale a k.

Esercizio 2. Sia V lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con base canonica $\underline{e} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ fissata e coordinate (x^1, x^2, x^3). Spiegare perché $\exists$ *unica* l'applicazione lineare $P : V \longrightarrow V$ tale che

$$P\underline{e}_1 = 2\underline{g}_1 - 2\underline{g}_3\,, \qquad P\underline{e}_2 = \underline{g}_2 + \underline{g}_3\,, \qquad P\underline{e}_3 = \underline{g}_1 + \underline{g}_2 + \underline{g}_3\,,$$

con $\{\underline{g}_1 = (2, 0, 1)\,, \underline{g}_2 = (1, 3, 0)\,, \underline{g}_3 = (0, 1, 2)\}$. Determinare la matrice $M_{\underline{e},\underline{e}}(P)$ associata a P nella base canonica $\underline{e}$. Si noti ora che $\underline{g} = \{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$. Determinare la matrice $M_{\underline{g},\underline{e}}(P)$. Determinare la matrice $M_{\underline{g},\underline{g}}(P)$. Determinare l'immagine del vettore $\underline{u} = 2\underline{e}_1 + 3\underline{e}_2 + 2\underline{e}_3$ tramite P.

Esercizio 3. $V = \mathbb{R}^3$ con base canonica $\underline{e}$ fissata e coordinate associate (x^1, x^2, x^3). Sia $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(3.0) Scrivere l'espressione di Q in coordinate (come in Sernesi pag 152)
(3.1) Determinate equazioni cartesiane e parametriche per $N(Q)$ e $\mathrm{Im}\, Q$.
(3.2) Determinare l'immagine tramite Q della retta vettoriale di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} X^1 - X^3 = 0 \\ X^2 + 2X^3 = 0 \end{cases}$$

(3.3) Determinare equazioni cartesiane per l'immagine del piano π di equazione $X^1 - X^3 = 0$. Qual è la dimensione di $Q(\pi)$?
(3.4) Determinare equazioni parametriche per l'immagine del piano σ di equazione $5X^1 - 3X^2 = 0$. Qual è la dimensione di $Q(\sigma)$?
Confrontare le dimensioni di $Q(\pi)$ e $Q(\sigma)$. C'è qualcosa di strano oppure è tutto OK ? Giustificare.

Riassunto su proiezioni e simmetrie (con piccolo cambio di notazione).
Sia V lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$. Sia π un piano ed r una retta non contenuta in π. Sappiamo che ogni vettore $\underline{w}$ di $\mathbb{R}^3$ si scrive in maniera unica come $\underline{w} = \underline{w}_1 + \underline{w}_2$ con $\underline{w}_1 \in r$ e $\underline{w}_2 \in \pi$. Equivalentemente: $V = r \oplus \pi$.

Abbiamo definito un'applicazione $P_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ associando a $\underline{w} \in \mathbb{R}^3$ il vettore $\underline{w}_1 \in \mathbb{R}^3$: $P_1(\underline{w}) := \underline{w}_1$ per definizione. (I due punti prima dell'uguaglianza vengono spesso utilizzati in Matematica per definire ciò che c'è a sinistra tramite quello che c'è a destra.) L'applicazione P_1 è *lineare* ed è, per definizione, la proiezione su r parallelamente a π. La legge $\underline{w} \longrightarrow \underline{w}_2$ definisce la proiezione su π parallelamente a r; questa è anche un'applicazione lineare ed è denotata tramite P_2. Quindi $P_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $P_2(\underline{w}) := \underline{w}_2$.

Abbiamo altre due applicazione *lineari* definite dalla decomposizione $\mathbb{R}^3 = \pi \oplus r$. La simmetria S_1 rispetto a r parallelamente a π e la simmetria S_2 rispetto a π parallelamente a r:

$$S_1(\underline{w}) := \underline{w}_1 - \underline{w}_2 \qquad S_2(\underline{w}) := \underline{w}_2 - \underline{w}_1 .$$

Disegnate π, r ed un generico $\underline{w} \in \mathbb{R}^3$ con $\underline{w} \notin r$, $\underline{w} \notin \pi$; sul disegno indicate $P_1(\underline{w})$, $P_2(\underline{w})$, $S_1(\underline{w})$, $S_2(\underline{w})$.
Fine riassunto.

Esercizio 4. Verificare che in $\mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ sussistono le seguenti identità:

$$(P_1)^2 = P_1\,; \quad (P_2)^2 = P_2\,; \quad P_2 = \mathrm{Id} - P_1\,; \quad S_1 = \mathrm{Id} - 2P_2\,; \quad S_2 = 2P_2 - \mathrm{Id}\,.$$

È bene ricordare che se $T \in \mathrm{End}(V)$ allora $T^2 := T \circ T$. In queste formule Id è l'applicazione identica che manda $\underline{v}$ in $\underline{v}$.
Suggerimento: dire che due applicazioni $S, T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sono uguali vuol dire che $S(\underline{w}) = T(\underline{w}) \quad \forall \underline{w} \in \mathbb{R}^3$....

Esercizio 5. Sia V lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con base canonica $\underline{e} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ fissata e coordinate (x^1, x^2, x^3). Scrivere la matrice associata nella base $\underline{e}$ alla proiezione P_2 sul piano π di equazione $-X^1 + X^2 + X^3 = 0$ parallelamente alla retta $r = \mathbb{R}(1,2,1)$ (più concisamente: *determinare* $M_{\underline{e},\underline{e}}(P_2)$). Determinare anche le matrici $M_{\underline{e},\underline{e}}(S_1)$ ed $M_{\underline{e},\underline{e}}(S_2)$. Scrivere l'espressione di queste 3 applicazioni in coordinate.

Esercizio 6. Fissiamo le basi canoniche in $\mathbb{R}^3$ e in $\mathbb{R}^4$. Sia $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinare la matrice associata all'applicazione lineare $U = S \circ T$ rispetto alla basi fissate.