Geometria I. Gruppo A-L. Anno accademico 1999/2000.

Compito pomeridiano del 18/10/99

Istruzioni per l'uso: cercate di fare questi esercizi da soli. Lavorare in coppia o in gruppo è più divertente ma **molto** meno istruttivo.

Esercizio 1. Stabilire se l'insieme

$$V = \{\underline{v} = a + b\sqrt{2},\ \forall a,\, b\, \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$$

è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ rispetto alle operazioni di somma e prodotto per scalari definite da

$$(a + b\sqrt{2}) + (a' + b'\sqrt{2}) = (a + a') + (b + b')\sqrt{2} \qquad k(a + b\sqrt{2}) = ka + kb\sqrt{2},\ k \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 2. Stabilire se l'insieme $\mathbb{R}^2$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ rispetto alle operazioni:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')\,, \qquad k(x, y) = (kx, -ky)\,, \quad \forall k \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}^3$. Stabilire se il sottoinsieme

$$W = \{(x, y, z) \in V \ \mid\ z = x^2 + y^2\}$$

è un sottospazio di V.

Esercizio 4. Sia $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sia $W \subset M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ il sottoinsieme

$$W = \{B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid A \cdot B = B \cdot A\}\,.$$

4.1 Verificare che W è un sottospazio vettoriale di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
4.2 Determinare una base per W e la sua dimensione.

Esercizio 5. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e sia $W = \{(x, y, z) \in V \,|\, x + y + z = 0\}$. Sappiamo che W è un sottospazio di dimensione 2 di V. Determinare una base di W. Quanti sottospazi U di V esistono con la proprietà che $V = U \oplus W$? Trovarne almeno tre distinti.

Esercizio 6. Sia $A = (a^i_j)$ una matrice in $M_{n\times n}(\mathbb{R})$. La *traccia* di A è il numero reale $\sum_{i=1}^n a^i_i$. La traccia di A si denota con $\mathrm{Tr}(A)$.
6.1 Verificare che

$$W = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \,|\, \mathrm{Tr}(A) = 0\}$$

è un sottospazio di $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

6.2 Nel caso $n = 2$ determinare una base di W e la sua dimensione. Determinare inoltre un sottospazio U di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tale che $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = U \oplus W$.

Esercizio 7. Sia $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ lo spazio vettoriale che ha come insieme di vettori i numeri reali $\mathbb{R}$ e come campo di scalari i numeri razionali $\mathbb{Q}$. Le operazioni sono indotte dalle usuali operazioni sui reali. Dimostrare che $\dim \mathbb{R}_{\mathbb{Q}} \geq 2$.

Esercizio 8. Sia $V = \mathbb{R}^6$ e si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = (1,0,1,0,1,0)\,,\ \underline{v}_2 = (0,1,0,1,0,1)\,,\ \underline{v}_3 = (0,0,0,0,0,0)\,,\ \underline{v}_4 = (0,0,1,1,1,1).$$

Stabilire se questi 4 vettori sono linearmente indipendenti. Determinare la dimensione di

$$U =< \underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_1 - \underline{v}_2, \underline{v}_1 + 4\underline{v}_2, \underline{v}_1 - 4\underline{v}_2, 2\underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_1 + 12\underline{v}_2 > \ .$$

Determinare la dimensione di

$$T =< \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_4, \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_4 > .$$

Esercizio 9. Utilizzando il metodo di Gauss-Jordan discutere il seguente sistema al variare di $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x + ty = 0 \\ x + (t+1)y + z = 1 \\ tx + 2y + (t+2)z = \sin^2 t - t^2 + 2 \end{cases}$$

Esercizio 10. Verificare che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

è invertibile e calcolare A^{-1}.