Geometria I. Gruppo A-L. Anno accademico 1999/2000.

Compito in classe del 15/12/99

Vi ricordo che se V è uno spazio vettoriale, $\underline{v} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$ è una base di V e $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ è una forma bilineare *allora* è definita una matrice $A_b^{\underline{v}} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$; per definizione $A_b^{\underline{v}} = (b(\underline{v}_i, \underline{v}_j))$ dove il primo indice è un indice di riga ed il secondo indice è un indice di colonna. Viceversa, se $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ allora è definita una forma bilineare $b_A : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ come segue: se $\underline{f}$ ha coordinate $(x^1, \ldots, x^n)$ e $\underline{g}$ ha coordinate $(y^1, \ldots, y^n)$ nella base fissata, allora

$$b_A(\underline{f}, \underline{g}) := (x^1, \ldots, x^n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots y^n \end{pmatrix}$$

Esercizio 1. $V = \mathbb{R}^3$ con base canonica fissata.
(1.1) Sia A la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Scrivere l'espressione di b_A e calcolarla sulle seguenti coppie di vettori
$(1, 2, 1)$ e $(1, -1, 0)$
$(1, 0, -1)$ e $(-2, 3, 1)$
(1.2) Dire se b_A è simmetrica.
(1.3) Determinare la matrice associata a b_A nella nuova base $\underline{w} = \{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3\}$ con

$$\underline{w}_1 = (1, 1, 1), \quad \underline{w}_2 = (0, 1, 1), \quad \underline{w}_3 = (0, 0, 1).$$

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}_2[X]$ lo spazio vettoriale dei polinomi nell'indeterminata X a coefficienti reali e di grado ≤ 2. Fissiamo la base canonica $\underline{v} = \{1, X, X^2\}$. Definiamo un'applicazione $b : V \times V \to \mathbb{R}$ ponendo per ogni $p, q \in V$

$$b(p, q) = p(0)q(0) + p(\frac{1}{2})q(\frac{1}{2}) + p(1)q(1).$$

(2.1). Verificare che b è una forma bilineare.
(2.2). Dire se b è simmetrica.
(2.3). Determinare la matrice associata a b nella base canonica

Esercizio 3. Sia V lo spazio vettoriale dei vettori geometrici dello spazio ordinario. In V è definito il prodotto scalare $\times$. Fissiamo una base ortonormale $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ e consideriamo le coordinate associate (x^1, x^2, x^3).
(3.1). Sia $F \in \mathrm{End}(V)$. Verificare che

$$b(\underline{v}, \underline{w}) := \frac{1}{2}(F\underline{v} \times \underline{w} + \underline{v} \times F\underline{w})$$

è una forma bilineare simmetrica su V.
(3.2). Sia F la proiezione ortogonale sul piano di equazione cartesiana $X^1 + X^2 + X^3 = 0$. Determinare la matrice associata a b nella base ortonormale fissata.