Geometria I. Gruppo A-L. Anno accademico 1999-2000.

Compito del 14/1/00.

Spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ con base canonica $\underline{e} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4\}$ fissata.
Sia $b(\ ,\ )$ la forma bilineare simmetrica definita in coordinate da

$$b(\underline{u}, \underline{v}) = u^1v^1 - u^2v^2 + u^3v^4 + u^4v^3 \tag{1}$$

Abbiamo già considerato questa forma bilineare nell'esercizio 3 del §2 degli esercizi del periodo natalizio. La matrice associata a $b(\ ,\ )$ nella base canonica $\underline{e}$ si legge dalla definizione di $b(\ ,\ )$ ed è

$$A_b^{\underline{e}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Dato che $\det A_b^{\underline{e}} = 1$ ne segue che $b(\ ,\ )$ è non degenere.

In $\mathbb{R}^4$ c' è una struttura di spazio euclideo ottenuta considerando il prodotto scalare canonico $\bullet$. $(\mathbb{R}^4, \bullet)$ è quindi uno *spazio vettoriale euclideo*; rispetto a questo prodotto scalare la base canonica è ortonormale. Tutto ciò vi è ben noto.

1) Definire a partire da $b(\ ,\ )$ un operatore simmetrico T. Trovare una base ortonormale di $(\mathbb{R}^4, \bullet)$ cosrituita da autovettori per T.

2) Determinare una base ortonormale di $(\mathbb{R}^4, \bullet)$ rispetto alla quale $b(\ ,\ )$ si scriva in forma diagonale. In altre parole, determinare una base ortonormale $\underline{h}$ di $(\mathbb{R}^4, \bullet)$ tale che $A_b^{\underline{h}}$ sia diagonale.

3) Determinare una base $\underline{g}$ di $\mathbb{R}^4$ che diagonalizzi l'operatore T ma *non* diagonalizzi la forma $b(\ ,\ )$.
Suggerimento. Sicuramente dovete fissare una base $\underline{g}$ di autovettori per T; come andranno scelti questi autovettori per essere tali da *non* diagonalizzare $b(\ ,\ )$?

4) Determinare una base $\underline{k}$ di $\mathbb{R}^4$ che diagonalizzi $b(\ ,\ )$ ma *non* diagonalizzi T.
Suggerimento : diagonalizzare $b(\ ,\ )$ vuol dire trovare una base $\underline{k}$ di $\mathbb{R}^4$ che sia b-ortogonale, tale cioè che $b(\underline{k}_i, \underline{k}_j) = 0$ per $i \neq j$. Questo passo vi dovrebbe essere, a questo punto, familiare (ed in ogni caso è stato già illustrato nelle soluzioni distribuite). Di quale ulteriore proprietà dovrà godere questa base per essere tale da *non* diagonalizzare T ?

Sono dati i 4 vettori linearmente indipendenti

$$\underline{w} = \{\underline{w}_1 = (1,0,0,0) \quad \underline{w}_2 = (1,1,0,0) \quad \underline{w}_3 = (0,0,1,0) \quad \underline{w}_4 = (0,0,0,1)\}.$$

Definiamo un *nuovo* prodotto scalare $<\,,\,>$ in $\mathbb{R}^4$ dichiarando questi 4 vettori ortonormali ed estendendo per bilinearità. Otteniamo un *nuovo* spazio vettoriale *euclideo* $(\mathbb{R}^4, <\,,\,>)$[1] . Premessa all'esercizio: l'operatore di cui in 1) dipende dalla struttura di spazio euclideo definita dal prodotto scalare canonico $\bullet$. Se cambiamo prodotto scalare allora otteniamo (presumibilmente) un operatore diverso.

5) Calcolare la matrice associata nella base canonica all'operatore simmetrico T' definito dalla forma bilineare (1) e dal nuovo prodotto scalare $<\,,\,>$.
Suggerimento. È facile calcolare $A_{\underline{b}}^{\underline{w}}$ perché basta utilizzare la formula magica che collega le matrici associate ad una fissata forma bilineare in due basi diverse. A partire da $A_{\underline{b}}^{\underline{w}}$ otteniamo $M_{\underline{w}}(T')$ (immediato dalla definizione) e una volta noto $M_{\underline{w}}(T')$ possiamo determinare $M_{\underline{e}}(T')$ come al solito...
Verificate ora che T e T', pur essendo associati alla stessa forma bilineare, sono operatori *diversi*.

[1] Abbiamo visto nell' esercizio 6 del §2 degli esercizi del periodo natalizio come sia possibile calcolare la matrice associata a $<\,,\,>$ *nella base canonica*. Si trova (vedi le soluzioni distribuite):

$$A_{<\,,\,>}^{\underline{e}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$<(x^1, x^2, x^3, x^4), (y^1, y^2, y^3, y^4)> = x^1y^1 - x^1y^2 - x^2y^1 + 2x^2y^2 + x^3y^3 + x^4y^4$$

che è ovviamente diverso da $(x^1, x^2, x^3, x^4) \bullet (y^1, y^2, y^3, y^4) = x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3 + x^4y^4$; ciò dimostra che *come spazi euclidei* $(\mathbb{R}^4, <\,,\,>)$ e $(\mathbb{R}^4, \bullet)$ sono *diversi.*