Geometria I. Gruppo A-L. Anno accademico 1999/2000.

Compito per il fine settimana del 10/12/99.

Sia V lo spazio vettoriale tridimensionale dei vettori geometrici. Fissiamo una base *ortonormale* $\underline{e} = \{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ con coordinate associate (x, y, z). Vi ricordo che il prodotto scalare di due vettori $\underline{v}$, $\underline{w}$ è per definizione il numero reale: $\underline{v} \times \underline{w} := |\underline{v}||\underline{w}| \cos \widehat{\underline{v}\underline{w}}$. Si noti che allora $|\underline{v}|^2 = \underline{v} \times \underline{v}$ e che $\cos \widehat{\underline{v}\underline{w}} = (\underline{v} \times \underline{w})/\sqrt{\underline{v} \times \underline{v}} \cdot \sqrt{\underline{w} \times \underline{w}}$. Se $\underline{v} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ e $\underline{w} = x'\underline{i} + y'\underline{j} + z'\underline{k}$ allora $\underline{v} \times \underline{w} = xx' + yy' + zz'$. In particolare $|\underline{v}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$ e $\cos \widehat{\underline{v}\underline{w}} = (xx' + yy' + zz')/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}$. Vi ricordo anche che il vettore $(\underline{v} \times \underline{w}/\underline{v} \times \underline{v})\underline{v}$ rappresenta la proiezione ortogonale del vettore $\underline{w}$ sulla retta individuata dal vettore $\underline{v}$. Se $\underline{v}$ è unitario (e cioè $|\underline{v}| = 1$) allora tale proiezione è data da $(\underline{v} \times \underline{w})\underline{v}$. Per quel che concerne il prodotto vettoriale $\underline{v} \wedge \underline{w}$ visto oggi a lezione, vi rimando al Sernesi pag. 223. Voglio solo sottolineare che in base a quanto osservato dopo la Proposizione 18.4 in Sernesi possiamo affermare che $\underline{v} \wedge \underline{w}$, se non è il vettore nullo (il che accade sse i due vettori sono proporzionali), è il vettore che ha come *lunghezza* il numero $|\underline{v}||\underline{w}| \sin \widehat{\underline{v}\underline{w}}$, come *direzione* quella ortogonale al piano individuato da $\underline{v}$ e $\underline{w}$ e come *verso* quello tale che la base $\underline{v}, \underline{w}, \underline{v} \wedge \underline{w}$ abbia la stessa orientazione della base fissata $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$. Alcuni testi danno questa come definizione. Questa caratterizzazione del prodotto vettoriale è molto utile.

Esercizio 1. Determinare le coordinate dei vettori $\underline{v}$ di lunghezza uguale a 2 ed ortogonali sia a $\underline{f} = (1, -1, 2)$ che a $\underline{g} = (0, 1, -1)$. (Volendo potete utilizzare il prodotto *vettoriale*...).

Esercizio 2. Consideriamo il piano vettoriale σ di equazione cartesiana

$$X + 2Y - Z = 0$$

(i) Verificare che i vettori

$$\underline{f}_1 = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}, 0) \qquad \underline{f}_2 = (\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}})$$

costituiscono una base *ortonormale* di σ.
(ii) Decomporre il vettore $\underline{u} = (0, 1, 2)$ del piano σ nella somma $\underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2$ con $\underline{u}_1 \in \mathbb{R}\underline{f}_1$ e $\underline{u}_2 \in \mathbb{R}\underline{f}_2$.
(iii) Determinare i vettori di σ che formano un angolo di $\pi/4$ con $\underline{u}$.

Esercizio 3.
(i) Determinare le coordinate dei vettori $\underline{v} \in V$ che sono complanari a $\underline{f} = (1, -2, 0)$ e $\underline{g} = (2, 0, 1)$, hanno lunghezza uguale a $\sqrt{6}$ e sono ortogonali a $(3, -1, -1)$.
(ii) Detto $\underline{v}_1$ il vettore determinato in (i) che forma un angolo ottuso con $\underline{j}$, determinare le coordinate del vettore proiezione ortogonale di $\underline{v}_1$ su $\mathbb{R}\underline{f}$.

Esercizio 4. Avete visto l'operazione di prodotto vettoriale di due vettori. In questo esercizio dovete utilizzare quello che avete imparato oggi sul prodotto vettoriale ma anche molte delle nozioni viste nell'ultimo mese di lezioni.

Sia
$$\underline{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{k}.$$

(4.0) Determinare l'equazione cartesiana del piano ortogonale a $\underline{u}$.

Si consideri l'applicazione $T : V \longrightarrow V$ che associa a $\underline{v}$ il vettore $\underline{u} \wedge \underline{v}$, con $\wedge$ uguale al prodotto vettoriale:
$$T\underline{v} = (\frac{1}{\sqrt{3}}\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{k}) \wedge \underline{v}.$$

(4.1) Verificare che T è lineare.

(4.2) Scrivere la matrice $M_{\underline{e}}(T)$ associata a T nella base fissata $\underline{e} = \{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$.

(4.3) Scrivere equazioni cartesiane per il nucleo $\mathrm{N}(T)$ e per $\mathrm{Im}\, T$.

(4.4) Determinare l'immagine tramite T della retta di equazioni cartesiane
$$\begin{cases} X - Z = 0 \\ Y + 2Z = 0 \end{cases}$$

Verificare che il piano π di equazione cartesiana $2X + 2Y - 3Z = 0$ ha immagine tramite T uguale ad un piano e si determini l'equazione cartesiana di tale piano. Verificate poi che il piano σ di equazione cartesiana $2X + Y - 3Z = 0$ ha invece immagine tramite T uguale ad una retta. Come si spiega questa differenza?

Vi ricordo che se $F : V \longrightarrow V$ è un'applicazione lineare di V in V allora, per definizione, un sottospazio W di V è *invariante* per F se $F(W) \subseteq W$.

(4.5) Determinare l'equazione cartesiana di un piano invariante per la nostra applicazione $T\underline{v} = \underline{u} \wedge \underline{v}$. (Suggerimento: questo piano deve avere qualcosa a che fare con il vettore $\underline{u}$. Potete ragionare geometricamente, senza fare conti complicati).
Sia W tale piano: dire se in W esistono autovettori per T.

(4.6) Dire se l'applicazione T è diagonalizzabile.

(4.7) Determinare una nuova base $\underline{f}$ di V nella quale la matrice associata a T, $M_{\underline{f}}(T)$, sia particolarmente semplice (e cioè con il max numero di zeri e min numero di coefficienti non nulli (possibilmente uguali a ± 1)).
Fine Esercizio 4.

Sia $V = \mathbb{R}^3$. Consideriamo un piano $\pi \subset V$. Data una retta r non contenuta in π abbiamo definito l'operatore P_2 di proiezione sul piano π parallelamente alla retta r. Fra tutte le rette non contenute in π c' è la retta ortogonale a π. In questo caso l'operatore P_2 è detto *l'operatore di proiezione ortogonale su* π. Analogamente abbiamo l'operatore di proiezione ortogonale su r, P_1. Per definizione questo è l'operatore di proiezione su r parallelamente al piano ortogonale a r. Fate una figura. Abbiamo poi, in maniera ovvia, l'operatore di *simmetria ortogonale* rispetto a r, S_1, e l'operatore di simmetria ortogonale rispetto a π, S_2. Fate una figura.

Esercizio 5. Scrivere la matrice associata nella base ortonormale fissata all'operatore di proiezione ortogonale sul piano π di equazione cartesiana $X + Y + Z = 0$
Suggerimento. Può essere utile osservare che, come al solito, $P_2 = \mathrm{Id} - P_1$ (con P_1 uguale alla proiezione ortogonale sulla retta r). Come si scrive la proiezione ortogonale di un generico vettore $\underline{w}$ sulla retta $\mathbb{R}(1, 1, 1)$ ortogonale a π ? Utilizzate il prodotto scalare.