Geometria 1. Gruppo A-L. Anno Accademico 1999-2000.

Compito pomeridiano del 8/11/99.

Prima di iniziare il compito pomeridiano facciamo un riassunto di quanto visto nelle ultime lezioni. Mi riferirò direttamente allo spazio affine, saltando quindi il piano affine. La piccola introduzione che segue è di natura euristica e non ha alcuna pretesa di rigore.

Introduzione.

Il nostro punto di partenza è stato lo *spazio ordinario* e le sue proprietà elementari. In una prima approssimazione possiamo pensare allo spazio ordinario come allo spazio fisico circostante. Le sue proprietà elementari nascono dall'esperienza: i concetti geometrici di punto, retta, piano, la loro mutua posizione etc... nascono da nozioni concrete tratte dalla considerazione dello spazio fisico. Da un punto di vista matematico queste proprietà elementari, (ad esempio "per due punti passa una ed una sola retta") non possono essere *dimostrate* a partire dall'esperienza fisica. Il primo a capire questa difficoltà fu Euclide il quale estrasse alcuni *assiomi* (o *postulati*) fondamentali sui quali fondare rigorosamente la geometria. Gli assiomi, insieme alle proprietà che da essi si possono dedurre, formano il complesso della *Geometria Euclidea*, che è quella che si studia (o si dovrebbe studiare) alla scuola media. Seguendo la trattazione data da Hilbert nel suo celebre "Fondamenti della geometria", gli assiomi della geometria euclidea si possono riassumere in cinque gruppi

1. *Assiomi di appartenenza* (del tipo "per tre punti non-allineati passa uno ed un solo piano"...).
2. *Assiomi di ordine* (permettono di fissare un verso su una retta)
3. *Assiomi di congruenza* (danno la nozione di confronto ed uguaglianza fra segmenti e fra angoli).
4. *Assiomi di continuità* (quelli dei numeri reali).
5. *Assioma delle parellele.*

Lo spazio è quindi un insieme i cui elementi sono detti punti e nel quale sono dati alcuni sottoinsiemi (rette, piani, segmenti...) verificanti questi 5 gruppi di assiomi. A priori ci possono essere varie geometrie euclidee: Hilbert dimostra che due geometrie euclidee differenti sono di fatto equivalenti e possono essere assimilate. Esiste quindi una sola geometria euclidea che è proprio quella che era nella testa di Euclide verso il 300 A.C. Passiamo alla geometria affine: fra gli assiomi di congruenza ci sono quelli che fanno intevenire la nozione di uguaglianza e confronto di segmenti che si trovano su una stessa retta o su rette parallele. Una nozione o una proprietà dello spazio è detta *affine* se, insieme agli assiomi 1, 2, 4, 5, fa intevenire soltanto gli assiomi di congruenza appena citati (e *non* fa quindi intevenire gli assiomi di congruenza che stabiliscono il confronto e l'uguaglianza fra segmenti appartenenti a rette *non-paralle* e fra angoli). Essere un trianglo isoscele, ad esempio, non è una proprietà affine. La nozione di parallelogramma è, invece, affine. Tutte le proprietà dedotte per mezzo dei vettori geometrici (classi di equipollenza di segmenti orientati) sono affini.

Fine dell'introduzione.

Sia A^3 lo spazio affine. Fissiamo un punto O dello spazio affine ed una base $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ per lo spazio vettoriale V dei vettori geometrici. Otteniamo un riferimento affine $O\underline{e}_1\underline{e}_2\underline{e}_3$ e coordinate (x, y, z) per i punti dello spazio. Facciamo un riassunto di quanto visto.

Un piano π dello spazio è assegnato assegnando un punto Q e due vettori linearmente indipendenti $\underline{w}_1, \underline{w}_2$. Il sottospazio vettoriale 2-dimensionale $W = < \underline{w}_1, \underline{w}_2 >$ è detto la *giacitura* del piano. Se il piano è assegnato tramite tre punti non allineati P_0, P_1, P_2 allora possiamo scegliere, ad esempio, $Q = P_0$ e $\underline{w}_1 = \overline{P_0P_1}$, $\underline{w}_2 = \overline{P_0P_2}$. Supponiamo che $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e che $\underline{w}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $\underline{w}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ e sia π il piano da essi individuato. Allora π ha equazioni parametriche

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + s(a_1, b_1, c_1) + t(a_2, b_2, c_2) \quad s, t \in \mathbb{R}$$

ed equazioni cartesiane ottenute sviluppando secondo la prima riga il determinante nell'equazione:

$$\det \begin{pmatrix} X - x_0 & Y - y_0 & Z - z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Questa è un'equazione del tipo

$$AX + BY + CZ + D = 0 \qquad \text{con} \quad (A, B, C) \neq (0, 0, 0).$$

Viceversa il sottoinsieme dei punti P dello spazio le cui coordinate soddisfano una tale equazione è un piano e più precisamente il piano passante per una soluzione particolare Q dell'equazione data e con giacitura

$$W = \{\underline{w} \in V \mid Aw^1 + Bw^2 + Cw^3 = 0\}.$$

Una retta r è data assegnando un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ed un *vettore direzione* $\underline{w} = (l, m, n) \neq \underline{0}$. Il sottospazio vettoriale $W = \mathbb{R}\underline{w}$ è detto la *direzione* di r. Le coordinate di $\underline{w}$ sono, per definizione, i *parametri direttori* di r. Ovviamente sono definiti a meno di un fattore di proporzionalità non nullo. Le equazioni parametriche di tale retta sono date da

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(l, m, n) \quad t \in \mathbb{R}.$$

Le equazioni cartesiane sono date imponendo che sia

$$r \begin{pmatrix} X - x_0 & Y - y_0 & Z - z_0 \\ l & m & n \end{pmatrix} = 1 \ .$$

Orlando un minore 1×1 non nullo nella seconda riga (certamente esistente dato che $\underline{w} \neq \underline{0}$) si ottengono due equazioni non omogenee

$$\begin{cases} AX + BY + CZ + D = 0 \\ A'X + B'Y + C'Z + D' = 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad r \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} = 2.$$

Viceversa il sottoinsieme di A^3 costitutito dai punti le cui coordinate soddisfano un tale sistema è una retta, e più precisamente la retta passante per una soluzione particolare del sistema dato e di direzione

$$W = \{\underline{w} \in V \mid \begin{cases} Aw^1 + Bw^2 + Cw^3 = 0 \\ A'w^1 + B'w^2 + C'w^3 = 0 \end{cases} \}.$$

Notare che per una proposizione sui sistemi omogenei $(n-1) \times n$ dimostrata a lezione, si ha che $W = \mathbb{R}\underline{w}$ con $\underline{w}$ ottenuto prendendo i minori a segni alterni che si ottengono da

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$$

cancellando la prima, seconda e terza colonna.

Abbiamo poi studiato la mutua posizione di rette e piani. Riassumiamo i risultati in una Proposizione. Tutta la dimostrazione, che è stata vista a lezione, si può fare utilizzando il Teorema di Rouché-Capelli. Vi invito a rifare la dimostrazione da soli. Notate che gli assiomi della geometria affine già ci dicono quali sono le eventualità che si possono presentare per la mutua posizione di rette e piani.

Proposizione.
1. Due piani π, π' sono paralleli se e soltanto se

$$r\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} = 1.$$

Il rango è invece uguale a due se e solo se $\pi \cap \pi' = r$, con r una retta (vedi sopra). Se π e π' sono paralleli allora $\pi = \pi'$ oppure $\pi \cap \pi' = \emptyset$ a seconda che sia rispettivamente

$$r\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix} = 1\,, \qquad r\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix} = 2\,.$$

2. Sia $r = \pi \cap \pi'$ una retta e sia σ il piano di equazione cartesiana $\alpha X + \beta Y + \gamma Z + \delta = 0$. Allora r è parallela a σ se e soltanto se

$$r\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} = 2$$

e cioè se e soltanto se il determinante di questa matrice 3×3 è $= 0$. Sia $W = \mathbb{R}(l, m, n)$ la direzione di r. Sviluppando il determinante secondo la terza riga e tenendo conto dell'osservazione all'inizio di questa pagina, vediamo che r è parallela a σ se e soltanto se

$$\alpha l + \beta m + \gamma n = 0\,.$$

Se r e σ sono paralleli allora $r \subset \sigma$ o $r \cap \sigma = \emptyset$ a seconda che sia rispettivamente

$$r\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{pmatrix} = 2 \qquad r\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{pmatrix} = 3.$$

Si ha invece che $r \cap \sigma = P$ se e soltanto se

$$r\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} = 3$$

(e cioè il determinante è diverso da zero).

3. Sono date due rette r e ρ dello spazio affine A^3 di equazione rispettivamente

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' = 0 \end{cases}.$$

r e ρ sono complanari se e soltanto se la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$$

ha determinante uguale a zero. Se r e ρ sono complanari allora

$$r=\rho, \qquad r\cap\rho=P, \qquad r//\rho$$

a seconda che si abbia rispettivamente

$$r\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{pmatrix} = 2\ ,$$

$$r\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{pmatrix} = 3\ ,$$

$$r\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{pmatrix} = 3 \quad r\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{pmatrix} = 2$$

Fine del riassunto.

ESERCIZI. Piano affine A^2 con riferimento $O\underline{e}_1\underline{e}_2$ fissato e coordinate associate (x, y).

Esercizio 1. Determinare i parametri direttori della retta di equazione cartesiana

$$2x-y+4=0$$

Esercizio 2. Dire se le 3 rette di equazione

$$3x+3y-1=0 \qquad 2x+y+2=0 \qquad x-y+2=0$$

sono incidenti in un punto.

Spazio affine A^3 con riferimento $O\underline{e}_1\underline{e}_2\underline{e}_3$ fissato e coordinate associate (x, y, z).

Esercizio 3. Determinare le equazioni parametriche e cartesiane del piano π per i punti $P_1=(1,0,0)$ $P_2=(0,1,1)$ e $P_3=(0,0,1)$.

Esercizio 4. Determinare due vettori $\underline{v}$, $\underline{v}'$ che individuino la giacitura di π.

Esercizio 5. Determinare l'equazione cartesiana del piano σ parallelo al piano π e passante per il punto $P=(16,1,0)$.

Esercizio 6. Determinare l'equazione cartesiana del piano parallelo al piano coordinato yz e passante per $P = (2,3,1)$. (Il piano coordinato yz è il piano per l'origine individuato dall'asse y e dall'asse z e cioè dalla giacitura $W =< \underline{e}_2, \underline{e}_3 >$.)

Esercizio 7. È data la retta r di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t - 2 \\ z = t + 3 \end{cases}$$

Determinare i parametri direttori di r. Scrivere equazioni cartesiane per r. Dire se queste equazioni sono univocamente determinate.

Esercizio 8. Determinare i parametri direttori della retta r

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

Scrivere le equazioni cartesiane delle rette s, s' parallele a r e passanti rispettivamente per $P = (0,1,1)$ e $P' = (0,0,0)$.

Esercizio 9. Scrivere equazioni ridotte per la retta r dell'Esercizio 8. Scrivere l'equazione del piano per tale retta e parallelo alla direzione $W = \mathbb{R}(11, 0, -1)$.

Esercizi per casa.

Esercizio 10. Verificare che se r e ρ sono date in forma ridotta

$$\begin{cases} x = lz + p \\ y = mz + q \end{cases} \qquad \begin{cases} x = l'z + p' \\ y = m'z + q' \end{cases}$$

allora r è complanare a ρ sse la matrice

$$\begin{pmatrix} l - l' & p - p' \\ m - m' & q - q' \end{pmatrix}$$

ha determinante uguale a zero.

Esercizio 11. Determinare le equazioni cartesiane della retta $\widetilde{r}$ parallela alla retta r di equazioni

$$\begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

e che incontra le rette s e t di equazioni rispettivamente

$$\begin{cases} x + 2z - 1 = 0 \\ y - z - 3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - z - 2 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Suggerimento: utilizzare il risultato dell'esercizio precedente.

Esercizio 12. Determinare la proiezione del punto $P = (1,1,-2)$ sul piano π di equazione

$$2x - y + 3z = 0$$

parallelamente alla direzione della retta

$$\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ 3x - z + 2 = 0 \end{cases}$$