**Geometria I. Gruppo A-L. Anno accademico 1999/2000.**

Compito a casa per il fine settimana del 3-5/12/99.

**Esercizio 1.** Verificare che l'applicazione lineare $F_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita dalla matrice

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

non è diagonalizzabile per $0 < \theta < 2\pi$, $\theta \neq \pi$. Come si poteva anticipare questo risultato ragionando geometricamente ? (Come agisce $F_\theta$ ? $F_\theta$ ammette rette invarianti ?).

**Esercizio 2.** Spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con base $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ canonica fissata e coordinate associate $(x^1, x^2, x^3)$. Siano $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e $S\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gli operatori lineari definiti dalle matrici

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(2.1) Verificare che $\mathrm{Im}(S) = \mathrm{Ker}(T)$ e $\mathrm{Im}(T) \neq \mathrm{Ker}(S)$.

(2.2) Verificare che i vettori

$$\underline{v}_1 = \underline{e}_1 + 2\underline{e}_2 + \underline{e}_3, \quad \underline{v}_2 = 2\underline{e}_1 + \underline{e}_2 - \underline{e}_3$$

costituiscono una base di $\mathrm{Im}\, T$.

(2.3) *Sia $W$, per definizione, il sottospazio* $\mathrm{Im}(T)$: $W := \mathrm{Im}\, T$. Sappiamo che $W$ è un sottospazio invariante per $T$. Consideriamo la restrizione di $T$ al sottospazio invariante $W$. Denotiamo come al solito questa restrizione con $T|_W$. Determinare la matrice associata a $T|_W$ nella base $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ di $W$.

(2.4) Dire se $T|_W\colon W \longrightarrow W$ è diagonalizzabile.

(2.5) Determinare l'equazione cartesiana, nelle coordinate $(x', y')$ di $W$ associate alla base $\underline{v}_1, \underline{v}_2$, della retta $r \subset \mathrm{Im}(T)$ individuata dal vettore $T(\underline{v}_1 - \underline{v}_2)$.

**Riassunto su polinomi, molteplicità algebrica etc...** Sia $P(T)$ un polinomio di grado $n$ a coefficienti reali: $P(T) = a_n T^n + \cdots + a_1 T + a_0 \in \mathbb{R}[T]$. Possiamo supporre senza perdita di generalità per quanto segue che $a_n = 1$. Dato che $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ si ha ovviamente che $\mathbb{R}[T] \subset \mathbb{C}[T]$. Se consideriamo $P(T)$ come polinomio a coefficienti complessi allora per il teorema fondamentale dell'algebra (che avete visto Venerdi' scorso) esistono numeri complessi $\mu_1, \ldots, \mu_n$ tali che

$$P(T) = (T - \mu_1) \cdots (T - \mu_n).$$

Questi numeri $\mu_j$ sono quindi le *radici* di $P(T)$ visto come polinomio complesso: sono $n$ radici. Fra questi $\mu_j$ alcuni saranno coincidenti. Siano $\{\mu_1, \ldots, \mu_k\}$ le radici distinte; allora

$$P(T) = (T - \mu_1)^{h(\mu_1)} \cdot \cdots \cdot (T - \mu_k)^{h(\mu_k)}.$$

Il numero intero $h(\mu_j)$ è, per definizione, la molteplicità di $\mu_j$ come radice del polinomio. Dato che il polinomio ha i coefficienti reali si ha che che se $\mu \in \mathbb{C}$ è una radice complessa di $P(T)$ allora anche $\overline{\mu} \in \mathbb{C}$ è una radice complessa di $P(T)$ (infatti: $P(\mu) = 0 \Rightarrow a_n\mu^n + \cdots + a_1\mu + a_0 = 0 \Rightarrow \overline{a_n\mu^n + \cdots + a_1\mu + a_0} = 0 \Rightarrow a_n\overline{\mu}^n + \cdots + a_1\overline{\mu} + a_0 = 0 \Rightarrow P(\overline{\mu}) = 0$). Quindi le radici di $P(T)$ sono reali oppure complesse-coniugate (non-reali). Siano

$$c_1 = \mu_1,\ \ \overline{c_1} = \mu_2, \ldots\ldots,\ \ c_k = \mu_{2k-1},\ \ \overline{c_k} = \mu_{2k}, \quad 0 \leq 2k \leq n$$

le radici complesse coniugate, e siano

$$r_1 = \mu_{2k+1}\,, \ldots\ldots, r_{n-2k} = \mu_n$$

le radici reali. Allora

$$P(T) = (T - c_1) \cdot (T - \overline{c_1}) \cdots (T - c_k) \cdot (T - \overline{c_k}) \cdot (T - r_1) \cdots (T - r_{n-2k}).$$

Quindi

$$P(T) = (T^2 - (c_1 + \overline{c_1})T + |c_k|^2) \cdots (T^2 - (c_k + \overline{c_k})T + |c_k|^2) \cdot (T - r_1) \cdots (T - r_{n-2k}).$$

dove vi ricordo che $\overline{a + ib} := a - ib$ e $|a + ib|^2 := a^2 + b^2 = (a + ib) \cdot (\overline{a + ib})$. In parole: ogni polinomio reale si decompone nel prodotto di polinomi *reali* di secondo grado (perché $c_j\overline{c_j} = |c_j|^2 \in \mathbb{R}$ e $(c_j + \overline{c_j}) \in \mathbb{R}$) che non ammettono radici reali e di polinomi reali di primo grado. Se $k = 0$ le radici sono tutte reali; se $2k < n$ allora esiste almeno una radice reale.
È importante notare che se $n = 2m + 1$ allora, ovviamente, $2k < 2m + 1 \equiv n$; quindi un polinomio reale di grado *dispari* ammette sempre (almeno) una radice reale.
Sia ora $V$ uno spazio vettoriale reale di dimensione $n$. Sia $F \in \mathrm{End}(V)$ e sia $P_F(T)$ il polinomio caratteristico di $F$; $P_F(T)$ è un polinomio a coefficienti reali di grado $n$ e le sue radici *reali* sono tutti e soli gli autovalori di $F$. Notiamo che se $\dim V = 2m + 1$ allora $F$ ammette autovettori (perché esiste almeno un autovalore).
**Definizione.** Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalore di $F$. La *molteplicità algebrica* di $\lambda$ è la sua molteplicità come radice del polinomio caratteristico $P_F(T)$; la denotiamo con $m_a(\lambda)$.
**Definizione.** Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalore di $F$. La *molteplicità geometrica* di $\lambda$ è la dimensione dell'autospazio $V_\lambda(F)$; la denotiamo con $m_g(\lambda)$.

Il 6/12 dimostreremo i seguenti teoremi.

**Teorema.** Sia $V$ uno spazio vettoriale reale e sia $F \in \mathrm{End}(V)$. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalore di $F$. Allora $m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$.

**Teorema.** Sia $V$ uno spazio vettoriale reale e sia $F \in \mathrm{End}(V)$. $F$ è diagonalizzabile se e soltanto se
(i) Il polinomio caratteristico $P_F(T)$ ha tutte le radici reali.
(ii) Per ogni autovalore $\lambda$ di $F$ si ha: $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$.