Geometria I. Gruppo A-L. Anno accademico 1999/2000.

Compito a casa del 1/12/99.

La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intendere la lingua e conoscere i caratteri ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto. (Galileo Galilei, *Saggiatore*)

Esercizio 1. Sia $F_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'operatore definito dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -2 & 5 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determinare gli autovalori di F_A. Determinare i relativi autospazi. Verificare che F_A è diagonalizzabile. Trovare una base diagonalizzante. Dire se tale base è univocamente determinata.

Esercizio 2. È data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Dire se A è diagonalizzabile.

Definizione. Sia $F \in \mathrm{End}(V)$ e sia W un sottospazio di V. Diremo che W è *un sottospazio invariante* per F (o *rispetto a* F) se $F(W) \subseteq W$. Se W è un sottospazio invariante allora possiamo definire *la restrizione* di F a W: $F|_W \in \mathrm{End}(W)$. Questa è l'applicazione lineare *da* W *a* W che associa a $\underline{w} \in W$ il vettore $F(\underline{w})$ in W.

Esercizio 3. Supponiamo che lo spettro di $F \in \mathrm{End}(V)$ sia non vuoto: $\mathrm{spec}(F) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\} \subset \mathbb{R}$. Verificare che se $\underline{v}$ è un autovettore allora $\mathbb{R}\underline{v}$ è una retta invariante. Verificare che, viceversa, se r è una retta invariante per $F \in \mathrm{End}(V)$ allora r è generata da un autovettore per F.
Verificare che ogni autospazio è un sottospazio invariante.
Verificare che $\mathrm{Im}(F)$ è un sottospazio invariante.

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}^3$ con base canonica $\underline{e}$ fissata e coordinate associate (x^1, x^2, x^3). Sia $F_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'operatore lineare definito dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Per semplicità denotiamo F_A con N.

(4.1) Verificare che il piano π di equazioni cartesiane $3x^1 - x^2 + 3x^3 = 0$ è invariante rispetto a N.

(4.2) Verificare che i vettori

$$\underline{f}_1 = (-3, 6, 5) \qquad \underline{f}_2 = (-1, -3, 0)$$

costituiscono una base $\underline{f}$ del piano π. Sia $N|_\pi : \pi \longrightarrow \pi$ la restrizione di N al piano π. Determinare la matrice associata ad $N|_\pi$ nella base $\underline{f} = \{\underline{f}_1, \underline{f}_2\}$: $M_{\underline{f}}(N|_\pi) \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(4.3) Verificare che $N|_\pi$ *non* è diagonalizzabile e che anzi $N|_\pi$ non ammette autovettori in π. (Quindi π è invariante per N ma in π non c'è nessuna retta invariante.)