Geometria 1. I^0 Modulo. a.a. 00/01. Gruppo E-N
Compito del 3/11/00

Esercizio 1. Stabilire se il sottoinsieme W di $\mathbb{R}^5$ definito da

$$W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^5 \mid \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_5 = 1 \end{cases} \}$$

è un sottospazio.

Esercizio 2. Stabilire se l'insieme $\mathbb{R}^2$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ rispetto alle operazioni:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')\,, \qquad k(x, y) = (kx, -ky)\,, \quad \forall k \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 3. Sia $A = (a_{ij})$ una matrice in $M_{n\times n}(\mathbb{R})$. La *traccia* di A è il numero reale $\sum_{i=1}^n a_{ii}$. La traccia di A si denota con $\mathrm{Tr}(A)$.
3.1 Verificare che

$$W = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}(A) = 0\}$$

è un sottospazio di $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.
3.2 Nel caso $n = 2$ determinare una base di W e la sua dimensione.

Esercizio 4. Sia $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ lo spazio vettoriale che ha come insieme di vettori i numeri reali $\mathbb{R}$ e come campo di scalari i numeri razionali $\mathbb{Q}$. Le operazioni sono indotte dalle usuali operazioni sui reali. Dimostrare che $\dim \mathbb{R}_{\mathbb{Q}} \geq 2$. (Suggerimento: dimostrare che i vettori $\underline{v}_1 = 1$ e $\underline{v}_2 = \sqrt{2}$ sono linearmente indipendenti...).

Esercizio 5. Una matrice $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ è detta *simmetrica* se $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni i, j. Una matrice A è detta *antisimmetrica* se $a_{ij} = -a_{ji}$ per ogni i, j.
5.1. Verificare che il sottoinsieme $\mathcal{S}_{n\times n}(\mathbb{R}) \subset M_{n\times n}(\mathbb{R})$ delle matrici simmetriche è un sottospazio.
5.2. Verificare che il sottoinsieme $\mathcal{A}_{n\times n}(\mathbb{R}) \subset M_{n\times n}(\mathbb{R})$ delle matrici antisimmetriche è un sottospazio.
5.3 Nel caso $n = 3$ determinare una base del sottospazio $\mathcal{S}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e una base del sottospazio $\mathcal{A}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

Esercizio 6. Sia W il sottoinsieme di $\mathbb{R}^6$ definito da

$$W = \{\underline{x} \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0\}$$

Spiegare perché W è un sottospazio. Determinarne una base.

Esercizio 7. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix}, \ \underline{v}_2 = \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}, \ \underline{v}_3 = \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Verificare che questi 3 vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$. Determinare le coordinate del vettore $\underline{e}_2 = (0, 1, 0)$ in questa nuova base di $\mathbb{R}^3$.