Algebra Lineare. a.a. 2004-05. Gruppo A-H. Prof. P. Piazza
Esercizi di geometria euclidea

Riassunto delle ultime lezioni
Fissiamo un'unità di misura nello spazio euclideo. Sia $\mathcal{V}_O$ lo spazio vettoriale tridimensionale dei vettori centrati in O.

Il prodotto scalare di due vettori $\underline{v}$, $\underline{w}$ è per definizione il numero reale:

$$<\underline{v},\underline{w}>=||\underline{v}||\,||\underline{w}||\cos\widehat{\underline{v}\underline{w}}\,,$$

dove prendiamo l'angolo convesso fra i due vettori (quindi $\widehat{\underline{v}\underline{w}}\in[0,\pi]$). Si noti che allora

$$||\underline{v}||^2=<\underline{v},\underline{v}>$$

e che

$$\cos\widehat{\underline{v}\underline{w}}=\frac{<\underline{v},\underline{w}>}{\sqrt{<\underline{v},\underline{v}>}\cdot\sqrt{<\underline{w},\underline{w}>}}$$

se $\underline{v}\neq\underline{0},\underline{w}\neq\underline{0}$.
Il prodotto scalare gode delle seguenti proprietà:
(i) è simmetrico: $<\underline{v},\underline{w}>=<\underline{w},\underline{v}>$
(ii) è lineare in entrambi gli argomenti (bilineare)
(iii) $<\underline{v},\underline{v}>\geq 0$ ed è $=0$ se e solo se $\underline{v}=\underline{0}$

Fissiamo una base *ortonormale* [1] $\{\underline{i},\underline{j},\underline{k}\}$ con coordinate associate (x,y,z). Abbiamo verificato utilizzando la bilinearità che se $\underline{v}=x\underline{i}+y\underline{j}+z\underline{k}$ e $\underline{w}=x'\underline{i}+y'\underline{j}+z'\underline{k}$ allora

$$<\underline{v},\underline{w}>=xx'+yy'+zz'\,.$$

In particolare $||\underline{v}||^2=x^2+y^2+z^2$ e

$$\cos\widehat{\underline{v}\underline{w}}=\frac{(xx'+yy'+zz')}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}}$$

Un vettore di lunghezza unitaria è detto un *versore*: se $\underline{v}\neq\underline{0}$ allora $\underline{v}/\|\underline{v}\|$ è un versore. In particolare se $r=\mathrm{Span}(\underline{w})$ allora r è generata da due versori

$$\frac{\underline{w}}{\|\underline{w}\|}\,,\quad \text{e}\quad -\frac{\underline{w}}{\|\underline{w}\|}$$

Abbiamo anche osservato che se $\underline{v}=x\underline{i}+y\underline{j}+z\underline{k}$ allora

$$x=<\underline{v},\underline{i}>\,,\quad y=<\underline{v},\underline{j}>\,,\quad z=<\underline{v},\underline{k}>$$

e quindi per ogni vettore $\underline{v}$ vale l'identità

$$\underline{v}=<\underline{v},\underline{i}>\underline{i}+<\underline{v},\underline{j}>\underline{j}+<\underline{v},\underline{k}>\underline{k}\tag{1}$$

Abbiamo poi dimostrato la seguente:
Proposizione. *Il vettore*

$$\frac{<\underline{v},\underline{w}>}{<\underline{w},\underline{w}>}\underline{w}$$

rappresenta la proiezione ortogonale del vettore $\underline{v}$ *sulla retta* $r=\mathrm{Span}(\underline{w})$.
Se $\underline{w}$ è un versore (e cioè $||\underline{w}||=1$) allora tale proiezione è data semplicemente da $(<\underline{v},\underline{w}>)\underline{w}$.

[1] i vettori della base hanno lunghezza unitaria e sono a due a due ortogonali

Sia $r = \mathrm{Span}(\underline{w})$ una retta. Sia $(r)^\perp$ il piano ortogonale a questa retta. È ovvio che si ha una decomposizione in somma diretta:

$$\mathcal{V}_O = r \oplus (r)^\perp$$

Ogni vettore $\underline{v}$ dello spazio $\mathcal{V}_O$ si scrive in maniera unica come

$$\underline{v} = \underline{v}_r + \underline{v}_{(r)^\perp} \tag{2}$$

Rimane quindi definita l'applicazione lineare P_r = proiezione sulla retta r (con $r = \mathrm{Span}(\underline{w})$) parallelamente al piano $(r)^\perp$:

$$P_r(\underline{v}) := \underline{v}_r$$

Chiamiamo questa proiezione *la proiezione ortogonale sulla retta r*. Analogamente abbiamo l'applicazione lineare $P_{(r)^\perp}$:

$$P_{(r)^\perp}(\underline{v}) := \underline{v}_{(r)^\perp}$$

che chiamiamo semplicemente la *proiezione ortogonale sul piano* $(r)^\perp$.
È ovvio dalla Proposizione che l'azione di P_r su un vettore $\underline{v} \in \mathcal{V}_O$ è data da

$$P_r(\underline{v}) = \frac{<\underline{v}, \underline{w}>}{<\underline{w}, \underline{w}>}\underline{w}\,, \quad \text{con} \quad r = \mathrm{Span}(\underline{w}) \tag{3}$$

È anche ovvio che

$$(\underline{v} - P_r(\underline{v})) \perp \underline{w} \quad (r = \mathrm{Span}(\underline{w})) \tag{4}$$

perché per costruzione $(\underline{v} - P_r\underline{v}) \in (r)^\perp$.

Sia π un piano. Sia $r = (\pi)^\perp$ la retta ortogonale al piano. C'è una decomposizone $\mathcal{V}_O = r \oplus \pi$; quindi per ogni $\underline{v} \in \mathcal{V}_O$ si ha

$$\underline{v} = \underline{v}_r + \underline{v}_\pi\,, \quad r = (\pi)^\perp \tag{5}$$

Sia P_π la proiezione ortogonale su π (e cioè la proiezione su π parallelamente alla retta ortogonale $\pi^\perp$); in formule

$$P_\pi\underline{v} = \underline{v}_\pi\,.$$

Supponiamo che $\pi = \mathrm{Span}(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$, con $\underline{u}_1 \perp \underline{u}_2$. È ovvio che

$$(\underline{v} - \underline{v}_\pi) \perp \underline{u}\,, \quad \forall \underline{u} \in \pi$$

perché per costruzione $(\underline{v} - \underline{v}_\pi) \in r = (\pi)^\perp$ e quindi, in particolare,

$$(\underline{v} - \underline{v}_\pi) \perp \underline{u}_1\,, \quad (\underline{v} - \underline{v}_\pi) \perp \underline{u}_2 \tag{6}$$

Abbiamo dimostrato la seguente
Proposizione. *La proiezione ortogonale P_π su π è data da*

$$P_\pi\underline{v} = \frac{<\underline{v}, \underline{u}_1>}{<\underline{u}_1, \underline{u}_1>}\underline{u}_1 + \frac{<\underline{v}, \underline{u}_2>}{<\underline{u}_2, \underline{u}_2>}\underline{u}_2 \tag{7}$$

se $\pi = \mathrm{Span}(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$ *e* $\underline{u}_1 \perp \underline{u}_2$.

Abbiamo poi visto il metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.
Se $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3\}$ è una qualsiasi base di $\mathcal{V}_O$ allora la sua base *ortogonalizzata* secondo il procedimento di Gram-Schmidt è la base $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ con $\underline{u}_1 = \underline{w}_1$,

$$\underline{u}_2 = \underline{w}_2 - \frac{<\underline{w}_2, \underline{u}_1>}{<\underline{u}_1, \underline{u}_1>}\underline{u}_1$$

$$\underline{u}_3 = \underline{w}_3 - \frac{<\underline{w}_3, \underline{u}_1>}{<\underline{u}_1, \underline{u}_1>}\underline{u}_1 - \frac{<\underline{w}_3, \underline{u}_2>}{<\underline{u}_2, \underline{u}_2>}\underline{u}_2$$

Vi faccio notare che $\underline{u}_2$ altri non è che $\underline{w}_2 - P_r(\underline{w}_2)$ con $r = \mathrm{Span}(\underline{w}_1)$ ed è quindi ortogonale a $\underline{w}_1 \equiv \underline{u}_1$ per la (4). Inoltre $\underline{u}_3$ altri non è che $\underline{w}_3 - P_\pi(\underline{w}_3)$ con $\pi = \mathrm{Span}(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$; questa differenza è ortogonale sia a $\underline{u}_1$ che a $\underline{u}_2$ per la (6). Tutto questo dimostra che i tre vettori $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ sono una base *ortogonale* ed hanno l'ulteriore proprietà che $\mathrm{Span}(\underline{w}_1) = \mathrm{Span}(\underline{u}_1)$, $\mathrm{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2) = \mathrm{Span}(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$, $\mathrm{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3) = \mathcal{V}_O = \mathrm{Span}(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3)$.

Una base *ortonormalizzata* è invece

$$\{\frac{1}{||\underline{u}_1||}\underline{u}_1, \frac{1}{||\underline{u}_2||}\underline{u}_2, \frac{1}{||\underline{u}_3||}\underline{u}_3\}\,.$$

ESERCIZI

Esercizio 1. Sia $W = \mathbb{R}(1, -1, 1)$ (Utilizziamo la notazione $\mathbb{R}(l, m, n)$ per il sottospazio $\mathrm{Span}((l, m, n))$.) Determinare un versore di questa retta. Determinare il versore di questa retta che forma un angolo acuto con il vettore della base $\underline{j}$.

Esercizio 2. Sia W la retta vettoriale di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Determinare i vettori di W che hanno lunghezza uguale a 2.

Esercizio 3. Determinare le coordinate dei vettori $\underline{v}$ che hanno lunghezza uguale a 2 e sono ortogonali sia a $\underline{f} = (1, -1, 2)$ che a $\underline{g} = (0, 1, -1)$. (I vettori di lunghezza 2 sono anche i vettori il cui quadrato della lunghezza è 4.)

Esercizio 4. Consideriamo il piano vettoriale σ di equazione cartesiana

$$x + 2y - z = 0$$

(i) Verificare che i vettori

$$\underline{f}_1 = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}, 0) \qquad \underline{f}_2 = (\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}})$$

costituiscono una base *ortonormale* di σ.

(ii) Decomporre il vettore $\underline{u} = (0, 1, 2)$ del piano σ nella somma $\underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2$ con $\underline{u}_1 \in \mathbb{R}\underline{f}_1$ e $\underline{u}_2 \in \mathbb{R}\underline{f}_2$. [2]

Esercizio 5. Spazio vettoriale $\mathcal{V}_O$ con base ortonormale $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ fissata e coordinate associate (x, y, z).

Applicare il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt alla seguente base di $\mathcal{V}_O$:

$$\underline{w}_1 = (1, 1, 0)\,, \quad \underline{w}_2 = (0, 1, 0)\,, \quad \underline{w}_3 = (0, 0, 2)\,.$$

---

[2] *Suggerimento per (ii).* Sappiamo che $\underline{u} \in \sigma$. Quindi esistono coefficienti α e β tali che $\underline{u} = \alpha\underline{f}_1 + \beta\underline{f}_2$ e per definizione sarà $\underline{u}_1 = \alpha\underline{f}_1$, $\underline{u}_2 = \beta\underline{f}_2$. Utilizzare il fatto che $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$ è una base ortonormale di σ e le proprietà di linearità del prodotto scalare per dimostrare che $< \underline{u}, \underline{f}_1 >= \alpha$ e che $< \underline{u}, \underline{f}_2 >= \beta$. Questo ragionamento non dovrebbe risultarvi nuovo....