Algebra Lineare. a.a. 2004-05. Gruppo A-H. Prof. P. Piazza
Esercizi su autovalori e autovettori del 14/1/05

Esercizio 1.
(i) Sia $F_A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ l'applicazione lineare definita dalla matrice:

$$A = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 4 & \pi & 0 \\ 0 & 2 & \sqrt{2} & -1 & \pi^2 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 2 & e \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

(1.1) Determinare la dimensione dell'immagine di F_A. Dire se F_A è iniettiva.
(1.2) Stabilire se F_A è diagonalizzabile.

(ii) Sia ora $F_A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ definita dalla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \pi & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 0 & \pi \\ 0 & 0 & 1 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Stabilire se F_A è diagonalizzabile.

Esercizio 2. Spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ con base canonica $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ fissata. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione *lineare* che ammette il sottospazio $\mathbb{R}(1,1)$ come autospazio associato all'autovalore $\lambda_1 = -2$ e il sottospazio $\mathbb{R}(-1,0)$ come autospazio associato all'autovalore $\lambda_2 = 3$.
(2.1) Spiegare perché F è univocamente determinata dalle condizioni date.
(2.2) Determinare la matrice associata ad F nella base canonica.

Esercizio 3. Sia

$$A = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}.$$

3.1 Dimostrare che l'applicazione lineare $F_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita da A è diagonalizzabile.
3.2 Determinare una matrice B tale che $\Delta := B^{-1}AB$ sia diagonale.
3.3 (Facoltativo) Calcolare A^{1223}.
Suggerimento: Δ^{1223} è facilmente calcolabile. Come sono collegati A^{1123} e Δ^{1223} ? Utilizzare **3.2**.

Esercizio 4. Sia $F_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$A = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

4.1 Verificare che F_A non è diagonalizzabile.
4.2 (Facoltativo) Sia ora $F_A^{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ l'applicazione lineare definita su $\mathbb{C}^2$ da A:

$$F_A^{\mathbb{C}} \begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \end{vmatrix} := \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \end{vmatrix}$$

(stessa definizione di F_A ma su $\mathbb{C}^2$); studiare la diagonalizzabilità di $F_A^{\mathbb{C}}$.

Esercizio 5.(Facoltativo) Due delle matrici

$$A_1 = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_4 = \begin{vmatrix} 5/2 & 1/8 \\ 2 & 5/2 \end{vmatrix}$$

$$A_5 = \begin{vmatrix} 3/2 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{vmatrix}$$

sono *simili*[1]: dire quali e giustificare la risposta.
Suggerimento: utilizzare il polinomio caratteristico.

---

[1] Abate pp 164-165: vi ricordo che due matrici A e A' sono simili se esiste una matrice invertibile B tale che $A' = B^{-1}AB$. Osservazione: se A e A' sono simili e se A' e A'' sono simili allora A e A'' sono anche simili:

$$A'' = C^{-1}A'C = C^{-1}B^{-1}ABC = (BC)^{-1}A(BC)$$