Geometria 1. I^0 Modulo. a.a. 00/01. Gruppo E-N
Compito pomeridiano del 31/10/00

Esercizio 1. Stabilire per quali valori del parametro reale h la seguente matrice è invertibile; determinare, quando possibile, l'inversa.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ h & 0 & -1 \\ 5 & 4 & h \end{vmatrix}$$

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}^3$. Stabilire se il sottoinsieme

$$W = \{(x, y, z) \in V \ \mid \ z = x^2 + y^2\}$$

è un sottospazio di V.

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}^6$ e sia W il sottoinsieme di $\mathbb{R}^6$ definito da

$$W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^6 \mid \begin{cases} x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 + \frac{1}{2}x_6 = 0 \\ x_2 - x_3 + 5x_4 - x_5 - \frac{1}{2}x_6 = 0 \\ x_5 + 4x_6 = 0 \end{cases} \}$$

Sappiamo che W è un sottospazio di $\mathbb{R}^6$. Determinare una base di W. (*Suggerimento:* cercate di esprimere W come Span di particolari vettori come negli ultimi 2 esercizi del compito della scorsa settimana. Verificate poi che questi particolari vettori sono linearmente indipendenti...)

Esercizio 4. Sia $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ la matrice

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Sia $W \subset M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ il sottoinsieme

$$W = \{B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid AB = BA\}.$$

4.1 Verificare che W è un sottospazio vettoriale di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
4.2 Determinare una base per W e la sua dimensione. (*Suggerimento:* Scrivere la generica matrice di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ nella forma

$$\begin{vmatrix} x & y \\ w & z \end{vmatrix}.$$

Esprimere W come insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo...)

Esercizio 5. Sia $V = \mathbb{R}^4$ e si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = (1, 0, 1, 0)\,,\ \underline{v}_2 = (0, 1, 0, 0)\,,\ \underline{v}_3 = (0, 0, 1, 0).$$

È facile vedere che questi 3 vettori sono linearmente indipendenti. Determinare la dimensione dei seguenti sottospazi

$$U = \mathrm{Span}(\underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_1 - \underline{v}_2, \underline{v}_1 + 4\underline{v}_2, \underline{v}_1 - 4\underline{v}_2, 2\underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_1 + 12\underline{v}_2)$$
$$W = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3)\,.$$