Algebra Lineare. Gruppo I-Z. Prof. P. Piazza
Compito pomeridiano del 30/10/02

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio $W = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4)$ con

$$\underline{v}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{vmatrix}, \ \underline{v}_2 = \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \\ -6 \\ -4 \end{vmatrix}, \ \underline{v}_3 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix}, \ \underline{v}_4 = \begin{vmatrix} 3 \\ -2 \\ 8 \\ 5 \end{vmatrix}$$

Determinare una base di W. Qual è la dimensione di W ?

Esercizio 2. Sia W il sottoinsieme di $\mathbb{R}^6$ definito da

$$W = \{\underline{x} \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0\}$$

Dopo aver spiegato perché W è un sottospazio, determinate una base di W.

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix}, \ \underline{v}_2 = \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}, \ \underline{v}_3 = \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Verificare che questi 3 vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$. Determinare le coordinate del vettore $\underline{e}_2 = (0, 1, 0)$ in questa nuova base di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}[x]$, lo spazio vettoriale dei polinomi in una variabile x. Sia $p(x) = 1 + x + x^2 + 5x^4$. Consideriamo $q(x) = x^2 + 5x^4$. Stabilire se $q(x) \in \mathrm{Span}(p)$.

Esercizio 5. Una matrice $A = (a_{ij}) \in M_{nn}(\mathbb{R})$ è detta *simmetrica* se $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni i, j. Una matrice A è detta *antisimmetrica* se $a_{ij} = -a_{ji}$ per ogni i, j.

5.0. Nel caso $n = 2$ e $n = 3$ dare esempi di matrici simmetriche e antisimmetriche.

5.1. Verificare che il sottoinsieme $\mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R}) \subset M_{nn}(\mathbb{R})$ delle matrici simmetriche è un sottospazio.

5.2. Verificare che il sottoinsieme $\mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R}) \subset M_{nn}(\mathbb{R})$ delle matrici antisimmetriche è un sottospazio.

5.3 Nel caso $n = 3$ determinare una base del sottospazio $\mathcal{S}_{33}(\mathbb{R})$ e una base del sottospazio $\mathcal{A}_{33}(\mathbb{R})$.

5.4 Nel caso $n = 3$ determinare la dimensione di questi due sottospazi.

Ulteriori esercizi.

Esercizio 6. Sia $A = (a_{ij})$ una matrice in $M_{nn}(\mathbb{R})$. La *traccia* di A è il numero reale $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. La traccia di A si denota con $\mathrm{Tr}(A)$.

6.1 Verificare che

$$W = \{A \in M_{nn}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}(A) = 0\}$$

è un sottospazio di $M_{nn}(\mathbb{R})$.

6.2 Nel caso $n = 2$ determinare una base di W e la sua dimensione.

Esercizio 7. Nello spazio vettoriale $M_{22}(\mathbb{R})$ si considerino i sottoinsiemi

$$W_0 = \{ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \text{ tali che } ad - bc = 0\}$$

$$W_1 = \{ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \text{ tali che } ad - bc = 1\}$$

Stabilire se W_0, W_1 sono sottospazi di $M_{22}(\mathbb{R})$.

Esercizio 8. Sia $\mathbb{R}_3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a tre. Si consideri il sottoinsieme

$$W = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(1) = 0\}$$

Stabilire se W è un sottospazio. Stesso esercizio per

$$U = \{q(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid q(2) = 4\}.$$

Esercizio 9. Sia $V = \mathbb{R}[x]$ e sia $p(x) = 1 + x + x^2 + 5x^4$. Consideriamo $q(x) = x^2 + 5x^4$. Stabilire se $q(x) \in \mathrm{Span}(p)$.