Algebra Lineare. a.a. 2004-05. Gruppo A-H. Prof. P. Piazza

Compito pomeridiano del 29/11/04 + compiti per casa

Esercizio 1. Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^5$ definito come l'insieme degli $\underline{x} \in \mathbb{R}^5$ soluzioni di

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

1.1 Determinare la dimensione di U.
1.2 Determinare $\ell \in \{1,2,3,4,5\}$ e un'applicazione lineare iniettiva $A : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^5$ che abbia come immagine U.
1.3 Determinare equazioni parametriche per U.

Esercizio 2. Determinare equazioni cartesiane per il sottospazio W di $\mathbb{R}^5$ definito da

$$W = \text{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix} \right)$$

Esercizio 3. Determinare una base per $U \cap W$.

Esercizio 4. Determinare equazioni cartesiane per il sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$ parallelo al sottospazio $W = \text{Span}(1,-1,2)$ e contenente il vettore $\underline{v}_0 := (0,1,0)$.

Esercizio 5. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ l'applicazione lineare la cui espressione in coordinate è data da

$$T \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_3 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \end{vmatrix}$$

Sia $S : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare la cui espressione in coordinate è data da:

$$S \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 + y_2 + y_3 - y_5 \\ y_3 + y_4 \end{vmatrix}$$

Determinare l'espressione in coordinate di $S \circ T$.

ESERCIZI PER CASA

Esercizio 1. $V = \mathbb{R}^3$ con base canonica. Dire se l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita dalla matrice

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

è invertibile.

Esercizio 2. Sia $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla matrice

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

(2.0) Scrivere l'espressione di Q in coordinate.
(2.1) Determinate equazioni cartesiane e parametriche per $\mathrm{Ker}(Q)$ e $\mathrm{Im}\, Q$. Studiare l'iniettività/suriettività di Q. Determinare la controimmagine del vettore $(2,-1,5)$[1]
(2.2) Determinare l'immagine tramite Q della retta[2] di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

(2.3) Determinare equazioni cartesiane per l'immagine del piano π di equazione $x_1 - x_3 = 0$. Qual è la dimensione di $Q(\pi)$?
(2.4) Determinare equazioni parametriche per l'immagine del piano σ di equazione $5x_1 - 3x_2 = 0$. Qual è la dimensione di $Q(\sigma)$?
Confrontare le dimensioni di $Q(\pi)$ e $Q(\sigma)$. C'è qualcosa di strano oppure è tutto OK ?
Cercate di spiegare cosa succede.

Esercizio 3 . Determinare l'espressione in coordinate di un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ che trasformi il vettore $(1,1) \in \mathbb{R}^2$ nel vettore $(1,1,1) \in \mathbb{R}^3$ ed abbia nucleo banale (quindi *iniettiva*). Determinare equazioni parametriche e cartesiane per il sottospazio immagine della vostra F. (La risposta non è, ovviamente, unica). Rifate questo esercizio imponendo sempre che F trasformi $(1,1)$ in $(1,1,1)$ ma richiedendo ora che il nucleo sia non banale. Fate delle figure che illustrino le vostre costruzioni.

Esercizio 4. Sia V lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$. Sia π un sottospazio vettoriale di dimensione 2, cioè un piano, ed r una retta non contenuta in π. Sappiamo che ogni vettore $\underline{w}$ di $\mathbb{R}^3$ si scrive in maniera unica come $\underline{w} = \underline{w}_1 + \underline{w}_2$ con $\underline{w}_1 \in r$ e $\underline{w}_2 \in \pi$. Equivalentemente: $V = r \oplus \pi$.
Definiamo un'applicazione $P_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ associando a $\underline{w} \in \mathbb{R}^3$ il vettore $\underline{w}_1 \in \mathbb{R}^3$: quindi $P_1(\underline{w}) = \underline{w}_1$ per definizione.
4.1 Verificare che l'applicazione P_1 è *lineare.* Essa è, per definizione, la proiezione su r parallelamente a π [3].

La legge $\underline{w} \longrightarrow \underline{w}_2$ definisce la proiezione su π parallelamente a r; questa è anche un'applicazione lineare ed è denotata tramite P_2. Quindi $P_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $P_2(\underline{w}) = \underline{w}_2$.
Abbiamo altre due applicazione *lineari* definite dalla decomposizione $\mathbb{R}^3 = \pi \oplus r$. La simmetria S_1 rispetto a r parallelamente a π e la simmetria S_2 rispetto a π parallelamente a r:

$$S_1(\underline{w}) = \underline{w}_1 - \underline{w}_2 \qquad S_2(\underline{w}) = \underline{w}_2 - \underline{w}_1.$$

[1] Vi ricordo che se $f : A \to B$ è un'applicazione fra insiemi, allora la controimmagine di $b \in B$ tramite f è il sottoinsieme di A definito da $\{a \in A \,|\, f(a) = b\}$. Analogamente si definisce la controimmagine di un sottoinsieme di B. La controimmagine di b tramite f viene denotata con $f^{-1}(b)$.

[2] Se $f : A \to B$ è un'applicazione fra insiemi, allora l'immagine di un sottoinsieme A' di A mediante f è il sottoinsieme di B definito da $f(A') = \{f(a) | \, a \in A'\}$.

[3] Questo esercizio è già stato svolto in classe: rifatelo da soli

4.2 Disegnate π, r ed un generico $\underline{w} \in \mathbb{R}^3$ con $\underline{w} \notin r$, $\underline{w} \notin \pi$; sul disegno indicate $P_1(\underline{w})$, $P_2(\underline{w})$, $S_1(\underline{w})$, $S_2(\underline{w})$.
4.3. Determinare l'immagine ed il nucleo di P_1 e P_2. Spiegare perché S_1 e S_2 sono biunivoche.
4.4 Verificare che sussistono le seguenti identità:

$$(P_1)^2 = P_1\,; \quad (P_2)^2 = P_2\,; \quad P_2 = \mathrm{Id} - P_1\,; \quad S_1 = \mathrm{Id} - 2P_2\,; \quad S_2 = 2P_2 - \mathrm{Id}\,.$$

È bene ricordare che se $T : V \to V$ è un'applicazione lineare allora T^2 è per definizione l'applicazione $T \circ T$ (che sappiamo essere ancora lineare) . In queste formule Id è l'applicazione identica, che manda $\underline{v}$ in $\underline{v}$.
Suggerimento: dire che due applicazioni $S, T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sono uguali vuol dire che $S(\underline{w}) = T(\underline{w}) \quad \forall \underline{w} \in \mathbb{R}^3$. Nel primo caso si tratta di dimostare che $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^3$ si ha $P_1(P_1(\underline{v})) = P_1(\underline{v})$...Fate una figura per aiutarvi.

Esercizio 5. (Facoltativo) Siano V, W, Z spazi vettoriali e $T : V \longrightarrow W$, $S : W \longrightarrow Z$ due applicazioni lineari. Verificare che se T è non-iniettiva allora la composizione $S \circ T$ è non-iniettiva *per ogni* $S : W \to Z$ (questo è molto facile da verificare). Supponiamo ora che S sia non-iniettiva: è vero che $S \circ T$ è non-iniettiva *per ogni* $T : V \to W$? La risposta è *no.* Elaborate una spiegazione e fornite un esplicito controesempio. Cercate di ragionare geometricamente utilizzando il sottospazio nucleo; provate con $V = \mathbb{R}^2$, $W = Z = \mathbb{R}^3$, S una proiezione su un piano parallelamente ad una retta (non è iniettiva), T l'applicazione iniettiva che avete costruito nell'Esercizio 2... Fate delle figure.