Geometria 1. I^0 Modulo. a.a. 00/01. Gruppo E-N
Compito pomeridiano del 28/11/00

Esercizio 1. Considerare il sistema

$$\begin{cases} x - y + mz = 0 \\ my - z = 0 \\ -x + y + z = m \end{cases}$$

Facendo uso del teorema di Cramer determinare per quali $m \in \mathbb{R}$ questo sistema è compatibile ed ammette un'unica soluzione. Determinare esplicitamente tale soluzione. Studiare il sistema per i rimanenti valori di m.

Esercizio 2. Consideriamo le matrici

$$A = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ e & f & g & h \\ x & y & z & w \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} a & b & l & m \\ c & d & n & p \\ 0 & 0 & g & h \\ 0 & 0 & z & w \end{vmatrix}.$$

Utilizzando l'eliminazione di Gauss verificare che

$$\det B = \det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \det \begin{vmatrix} g & h \\ z & w \end{vmatrix}$$

Cosa possiamo dire circa $\det A$?

Esercizio 3 Sia $\phi \in \mathbb{R}$ e si consideri il sistema

$$\begin{cases} (\cos\phi)x + (\sin\phi)y = 1 \\ (-\sin\phi)x + (\cos\phi)y = \sqrt{3} \end{cases}$$

3.1 Verificare che $\forall\phi \in \mathbb{R}\ \exists$ unica la soluzione $\underline{\eta}_\phi$ di questo sistema.
3.2. Verificare che se $\phi \in\ (0, 2\pi)$ (quindi $0 < \phi < 2\pi$) allora vale la
Proposizione: Ad angoli diversi corrispondono soluzioni diverse.

Esercizio 4. Sia $\phi \in \mathbb{R}$ con $\phi \in [0, 2\pi)$, $\phi \neq \frac{\pi}{4}, \phi \neq \frac{5}{4}\pi$. Denotiamo con D l'insieme di tali ϕ.
Si consideri il sistema

$$\begin{cases} (\cos\phi)x + (\sin\phi)y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

4.1 Verificare che $\forall\phi \in D\ \exists$ unica la soluzione del sistema dato.
4.2 Determinare due angoli diversi ai quali tuttavia corrispondono 2 soluzioni uguali.

Esercizio 5. Vero o falso: se una matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ ha due colonne uguali allora $\det A = 0$.
Quali altre proprietà di $\det A$ enunciate per le righe di A si possono rienunciare per le *colonne* di A ?