Algebra Lineare. Gruppo I-Z. Prof. P. Piazza
Compito pomeridiano del 27/11/02

Esercizio 1. Determinare l'espressione in coordinate, $\underline{y} = A\underline{x}$, di *un*'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ che trasformi il vettore $(1, 1) \in \mathbb{R}^2$ nel vettore $(1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ ed abbia nucleo banale (quindi *iniettiva*). Determinare equazioni parametriche e cartesiane per il sottospazio immagine della vostra F. (La risposta a queste domande *non* è, ovviamente, unica). Rifate questo esercizio imponendo sempre che F trasformi $(1, 1)$ in $(1, 1, 1)$ ma richiedendo ora che il nucleo sia non-banale.

Esercizio 2. Introduzione. Abbiamo definito a lezione il sottospazio immagine di un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$: $\mathrm{Im}F = \{\underline{y} \in \mathbb{R}^m \mid \exists \underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid F\underline{x} = \underline{y}\}$. (Per un'applicazione lineare $F : V \to W$ la definizione è del tutto analoga.) Abbiamo visto che, a causa della linearità, $\mathrm{Im}F$ è generato dalle immagini dei vettori di una base di $\mathbb{R}^n$. Ad esempio se $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è definita da una matrice A, quindi $F = F_A$, allora l'immagine di F è il sottospazio di $\mathbb{R}^m$ generato, ad esempio, dalle immagini dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$, cioè dalle colonne di A. Se ora U è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, possiamo definire l'immagine di U tramite F; questo è il sottoinsieme di $\mathbb{R}^m$ dato da $\{\underline{y} \in \mathbb{R}^m \mid \exists \underline{u} \in U \mid F\underline{u} = \underline{y}\}$. Denotiamo questo sottoinsieme con il simbolo $F(U)$.

Verificare che l'immagine di U tramite F è un sottospazio.
Sia $\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k\}$ una base di U. Vero o falso: $\{F\underline{u}_1, \dots, F\underline{u}_k\}$ è una base dell'immagine di U tramite F. Spiegare.

Esercizio 3. Sia $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla matrice

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} .$$

(3.1) Determinate equazioni cartesiane per $\mathrm{Im}\, Q$. Determinare una base per $\mathrm{Ker}Q$.
(3.2) Determinare una base per l'immagine tramite Q del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x^1 - x^3 = 0 \\ x^2 + 2x^3 = 0 \end{cases}$$

(3.3) Determinare equazioni cartesiane per l'immagine tramite Q del sottospazio U di equazione $x^1 - x^3 = 0$. Qual è la dimensione di $Q(U)$?
(3.4) Determinare equazioni parametriche per l'immagine del sottospazio U' di equazione $5x^1 - 3x^2 = 0$. Qual è la dimensione di $Q(U')$?
Confrontare le dimensioni di $Q(U)$ e $Q(U')$. C'è qualcosa di strano oppure è tutto OK ?
Cercate di spiegare cosa succede.

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}^2$ con base canonica fissata. Vi ricordo che le coordinate di $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ rispetto alla base canonica sono proprio $\underline{x}$. Sia U il sottospazio vettoriale di equazione cartesiana $x_1 - 2x_2 = 0$.
Consideriamo una seconda base di $\mathbb{R}^2$ data da

$$\underline{v}_1 = (1, 1) , \quad \underline{v}_2 = (1, -1)$$

e siano (y_1, y_2) le coordinate associate.
Determinare l'equazione cartesiana di U nelle coordinate (y_1, y_2).

Esercizio 5. Calcolare il determinante della matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$