Algebra Lineare. a.a. 2004-05. Gruppo A-H. Prof. P. Piazza
Compito pomeridiano del 25/10/04

Vi ricordo che a lezione abbiamo dato la definizione di combinazione lineare di vettori, dipendenza ed indipendenza lineare, sottospazio. Vi ricordo anche che abbiamo dato la nozione di base per uno spazio vettoriale ed enunciato il seguente fondamentale teorema:

Ogni spazio vettoriale V generato da un numero finito di vettori ammette una base $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k\}$. Inoltre, se $\mathcal{B}' = \{\underline{v}'_1, \ldots, \underline{v}'_h\}$ è un'altra base per V allora $h = k$.

Esercizio 1. Scrivere la matrice $A \in M_{22}(\mathbb{R})$ che è combinazione lineare delle matrici

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad A_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

con pesi rispettivamente $2, 1, -3$.

Esercizio 2. Stabilire se le matrici A_1, A_2, A_3 dell'esercizio precedente sono linearmente dipendenti.

Esercizio 3. Vero o Falso :

- 4 vettori in $\mathbb{R}^6$ sono sempre linearmente dipendenti
- 6 vettori in $\mathbb{R}^4$ sono sempre linearmente dipendenti.
- 4 vettori in $\mathbb{R}^6$ sono sempre linearmente indipendenti

Giustificare le risposte.

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}^3$. Quali dei seguenti sottoinsiemi di V è un sottospazio ? Giustificare le risposte.

$W_1 = \{(x, y, z) \in V \mid z = x^2 + y^2\}$.
$W_2 = \{t(1, 2, 2), 0 \leq t \leq 1\}$
$W_3 = \{(t, 0, 0), t \neq 0\}$
$W_4 =$ insieme delle soluzioni del sistema $\begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$
$W_5 =$ insieme delle soluzioni del sistema $\begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$
$W_6 = \{\underline{v} \in V \mid \underline{v} \neq (1, 0, 1)\}$

Esercizio 5. Stabilire se l'insieme $\mathbb{R}^2$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ rispetto alle operazioni:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'), \qquad k(x, y) = (kx, -ky), \quad \forall k \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 6. Sia $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ lo spazio vettoriale che ha come insieme di vettori i numeri reali $\mathbb{R}$ e come campo di scalari i numeri razionali $\mathbb{Q}$. Le operazioni sono indotte dalle usuali operazioni sui reali. Dimostrare che $\dim \mathbb{R}_{\mathbb{Q}} \geq 2$. (Suggerimento: dimostrare che i vettori $\underline{v}_1 = 1$ e $\underline{v}_2 = \sqrt{2}$ sono linearmente indipendenti...).

Esercizio 7. Sia $V = \mathbb{R}^4$ e si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = (1, 0, 1, 0), \ \underline{v}_2 = (0, 1, 0, 0), \ \underline{v}_3 = (0, 0, 1, 0).$$

Si può verificare che questi 3 vettori sono linearmente indipendenti.
Determinare una base per i seguenti sottospazi:

$W_1 = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_1 + 74\underline{v}_2 - \sqrt{2}\underline{v}_3)$
$W_2 = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$

$W_3 = \text{Span}(\underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_1 - \underline{v}_2, \underline{v}_1 + 2\underline{v}_2, \underline{v}_1 - 2\underline{v}_2)$

ESERCIZI PER CASA

Esercizio 1. Una matrice $A = (a_{ij}) \in M_{nn}(\mathbb{R})$ è detta *simmetrica* se $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni i, j. Una matrice A è detta *antisimmetrica* se $a_{ij} = -a_{ji}$ per ogni i, j.
1.1. Verificare che il sottoinsieme $\mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R}) \subset M_{nn}(\mathbb{R})$ delle matrici simmetriche è un sottospazio.
1.2. Verificare che il sottoinsieme $\mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R}) \subset M_{nn}(\mathbb{R})$ delle matrici antisimmetriche è un sottospazio.
1.3 Nel caso $n = 3$ determinare una base del sottospazio $\mathcal{S}_{33}(\mathbb{R})$ e una base del sottospazio $\mathcal{A}_{33}(\mathbb{R})$.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{R}_3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a tre. Si consideri il sottoinsieme

$$W = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(1) = 0\}$$

Stabilire se W è un sottospazio. Stesso esercizio per

$$U = \{q(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid q(2) = 4\}.$$

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}[x]$ e sia $p(x) = 1 + x + x^2 + 5x^4$. Consideriamo $q(x) = x^2 + 5x^4$. Stabilire se $q(x) \in \text{Span}(p)$.

Esercizio 4. Sia $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ lo spazio vettoriale che ha come insieme di vettori i numeri complessi e come campo degli scalari i numeri reali. Verificare che la dimensione di $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ è uguale a due. (Suggerimento: considerare i vettori 1 e i...).

Esercizio 5. Sia V uno spazio vettoriale e $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k\}$ vettori linearmente indipendenti. Verificare che se $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$, $c_j \neq 0\ \forall j$, allora i vettori

$$c_1\underline{v}_1, \ldots, c_k\underline{v}_k$$

sono anche linearmente indipendenti.
Esercizio 6. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix}, \ \underline{v}_2 = \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}, \ \underline{v}_3 = \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Verificare che questi 3 vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$. Determinare le coordinate del vettore $\underline{e}_2 = (0, 1, 0)$ in questa nuova base di $\mathbb{R}^3$.