Algebra Lineare. Gruppo I-Z. Prof. P. Piazza
Compito pomeridiano del 23/10/02

Vi ricordo che a lezione abbiamo dato la definizione generale di spazio vettoriale; lo abbiamo denotato con V. A partire dalla definizione è possibile ripetere quanto fatto per $\mathbb{R}^n$ e dare la definizione di combinazione lineare di vettori, dipendenza ed indipendenza lineare, sottospazio.
Rivediamo quest'ultima nozione.
Un sottoinsieme W di V è un sottospazio se è chiuso rispetto all'operazione di somma e all'operazione di prodotto per un numero reale [1]
Un esempio di sottospazio vettoriale di V è costituito da

$$W = \text{Span}(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k)$$

dove $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ sono k fissati vettori in V.

Definizione. Diremo che V ha *dimensione finita* se esiste un numero *finito* di vettori $\underline{v}_1, \ldots \underline{v}_k$ di V tali che $V = \text{Span}(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k)$.

Ad esempio, $\mathbb{R}^n$ ha dimensione finita dato che

$$\mathbb{R}^n = \text{Span}(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$$

con $\underline{e}_j$ la n-pla che ha tutte le componenti nulle tranne la j-ma che è uguale ad 1.

Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi nella variabile x non ha dimensione finita.[2]

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. Abbiamo poi dato la definizione di base per un sottospazio W: *una collezione ordinata di vettori $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_k$ è una base per W se*

(1) $W = \text{Span}(\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_k)$ (i vettori $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_k$ generano W).
(2) I vettori $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_k$ sono linearmente indipendenti.

Esercizio 1. Sia $W \subseteq V$ un sottospazio.
Vero o Falso: *il vettore nullo appartiene a W*

Esercizio 2. Dimostrare che in uno spazio vettoriale V si ha $0\underline{v} = \underline{0}\ \forall \underline{v} \in V$.

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}^3$. Quali dei seguenti sottoinsiemi di V è un sottospazio ? Giustificare le risposte.

$W_1 = \{(x, y, z) \in V \mid z = x^2 + y^2\}$.
$W_2 = \{t(1, 2, 2), 0 \leq t \leq 1\}$
$W_3 = \{(t, 0, 0), t \neq 0\}$
$W_4 =$ insieme delle soluzioni del sistema $\begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$
$W_5 =$ insieme delle soluzioni del sistema $\begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$
$W_6 = \{\underline{v} \in V \mid \underline{v} \neq (1, 0, 1)\}$

---

[1] In formule:
$\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in W \Rightarrow \underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in W$
$\alpha \in \mathbb{R}, \underline{w} \in W \Rightarrow \alpha\underline{w} \in W$.

[2] Supponiamo per assurdo che abbia dimensione finita; quindi $\mathbb{R}[x] = \text{Span}(p_1, \ldots, p_k)$ per opportuni polinomi $p_1, \ldots, p_k$. Sia k_j il grado di p_j e sia k il massimo fra questi k_j. È chiaro che facendo una combinazione lineare dei polinomi $p_1, \ldots, p_j$ ottengo un polinomio che ha *al più* grado k. Questo vuol dire che i polinomi di grado strettamente maggiore di k non appartengono a $\text{Span}(p_1, \ldots, p_k)$ il che è assurdo dato che siamo sotto l'ipotesi che $\mathbb{R}[x] = \text{Span}(p_1, \ldots, p_k)$.

Esercizio 4. Stabilire se l'insieme $\mathbb{R}^2$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ rispetto alle operazioni:

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')\,,\qquad k(x,y)=(kx,-ky)\,,\quad \forall k\in\mathbb{R}.$$

Esercizio 5.
Consideriamo il seguente sistema omogeneo di 3 equazioni in 6 incognite.

$$\begin{cases} x_2-x_3+3x_4-x_5+\frac{1}{2}x_6=0\\ 2x_4-x_6=0\\ x_5+4x_6=0\end{cases}$$

Sia W l'insieme delle soluzioni di questo sistema. Sappiamo che W è un sottospazio di $\mathbb{R}^6$. Determinare una base per W. (*Suggerimento:* cercate di esprimere W come Span di particolari vettori come in uno degli esercizi del compito della scorsa settimana. Verificate poi che questi particolari vettori sono linearmente indipendenti...)

Esercizio 6. Sia $V=\mathbb{R}^4$ e si considerino i vettori

$$\underline{v}_1=(1,0,1,0)\,,\ \underline{v}_2=(0,1,0,0)\,,\ \underline{v}_3=(0,0,1,0).$$

È facile verificare che questi 3 vettori sono linearmente indipendenti.
Determinare una base per i seguenti sottospazi:
$W_1=\mathrm{Span}(\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3,\underline{v}_1+\underline{v}_2,\underline{v}_1+74\underline{v}_2-\sqrt{2}\underline{v}_3)$
$W_2=\mathrm{Span}(\underline{v}_1,\underline{v}_2)$
$W_3=\mathrm{Span}(\underline{v}_1+\underline{v}_2,\underline{v}_1-\underline{v}_2,\underline{v}_1+2\underline{v}_2,\underline{v}_1-2\underline{v}_2)$

Esercizio 7. Sia $A\in M_{22}(\mathbb{R})$ la matrice

$$\begin{vmatrix} 0 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix}.$$

Sia $W\subset M_{22}(\mathbb{R})$ il sottoinsieme

$$W=\{B\in M_{22}(\mathbb{R})\mid AB=BA\}\,.$$

7.1 Verificare che W è un sottospazio vettoriale di $M_{22}(\mathbb{R})$.
7.2 Determinare una base per W. (*Suggerimento:* Scrivere la generica matrice di $M_{22}(\mathbb{R})$ nella forma

$$\begin{vmatrix} x & y\\ w & z\end{vmatrix}.$$

Esprimere W come insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo...)