Algebra Lineare. a.a. 2004-05. Gruppo A-H. Prof. P. Piazza
Compito pomeridiano del 20/12/2004

Esercizio 1. Consideriamo una retta r dello spazio affine. Diremo che le equazioni cartesiane di r sono in forma ridotta se sono del tipo

$$\begin{cases} x = lz + p \\ y = mz + q \end{cases}, \text{ oppure } \begin{cases} x = lz + p \\ z = ny + q \end{cases}, \text{ oppure } \begin{cases} y = mx + p \\ z = nx + q \end{cases}$$

Spiegare perché è sempre possibile trovare equazioni ridotte per una retta. Determinare equazioni ridotte per la retta r di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} 2x - 2y - 3z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

Osservazione. Consideriamo la retta di equazione ridotta

$$\begin{cases} x = lz + p \\ y = mz + q \end{cases}$$

È ovvio come passare ad equazione parametriche (basta porre $t = z$); è anche ovvio che i parametri direttori di r sono $(l, m, 1)$. In particolare, per una tale retta $n \neq 0$ e quindi tale retta non è mai parallela al piano coordinato xy, che ha equazione $z = 0$ [1] Concludiamo che al variare di l, m, p, q le equazioni

$$\begin{cases} x = lz + p \\ y = mz + q \end{cases}$$

rappresentano tutte le rette dello spazio ad eccezione di quelle parallele al piano coordinato xy. Un'osservazione simile vale per gli altri tipi di equazioni ridotte. Queste osservazioni sono a volte utili negli esercizi.

Esercizio 2. Si verifichi che esiste un solo piano contenente i tre punti

$$P_1 = (1, 2, 0), \quad P_2 = (1, 1, 1), \quad P_3 = (2, -1, -3).$$

e se ne dia un'equazione cartesiana.

Esercizio 3. Determinare l'equazione del piano per $Q_0 = (1, 2, -1)$ e parallelo alle rette r ed s di equazioni

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 3z = 1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x = -1 + t \\ y = t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$$

Nei tre esercizi che seguono può essere utile tenere a mente che le rette cercate possono essere espresse come intersezione di opportuni piani.

Esercizio 3bis. Determinare equazioni cartesiane per la retta passante per $Q = (-1, -1, -1)$, contenuta nel piano π di equazioni $x + y + z + 3 = 0$ e complanare alla retta s di equazioni

$$\begin{cases} x - 2z + 4 = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

[1] Vi ricordo che una retta di parametri direttori (l, m, n) è parallela ad un piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$ se $al + bm + cn = 0$.

Esercizio 4. Determinare le equazioni cartesiane della retta r passante per $(4,1,0)$ e complanare alle rette sghembe s e t di equazioni rispettivamente

$$\begin{cases} x+2z-1=0 \\ y-z-3=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-z-2=0 \\ y+z=0 \end{cases} .$$

Esercizio 5. Determinare la retta r per il punto $Q_0=(1,-1,-1)$ e complanare alle rette s ed t di equazione

$$\begin{cases} 2x+2y+1=0 \\ -2x+3y+z=0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} y=2 \\ z=1 \end{cases} .$$

Complementi ed esercizi ulteriori.

Sono date due rette r e ρ dello spazio affine $\mathcal{A}^3$ di equazione rispettivamente

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0 \\ \alpha' x+\beta' y+\gamma' z+\delta'=0 \end{cases} .$$

Esercizio 6. Dimostrare che r e ρ sono *complanari* se e soltanto se la matrice

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix}$$

ha determinante uguale a zero.

Suggerimento. Osserviamo preliminarmente che due piani di equazione $ax+by+cz+d=0$ e $\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$ sono coincidenti se e solo se rg $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ \alpha & \beta y & \gamma & \delta \end{vmatrix} = 1$ e quindi *se e solo se i 4 coefficienti dell'equazione sono proporzionali.* Siano ora r e ρ come sopra: le due rette sono complanari se e solo esiste un piano che le contiene. Abbiamo visto a lezione che la totalità dei piani per r è il fascio di piani

$$\ell(ax+by+cz+d)+\ell'(a'x+b'y+c'z+d')=0 \ \ , (\ell,\ell') \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

Denotiamo con $\pi_{(\ell,\ell')}$ il piano del fascio corrispondente alla scelta (ℓ,ℓ'). Analogamente, la totalità dei piani per r' è data da

$$\lambda(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta)+\lambda'(\alpha' x+\beta' y+\gamma' z+\delta')=0 \ \ , (\lambda,\lambda') \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

Denotiamo con $\pi_{(\lambda,\lambda')}$ il piano del fascio corrispondente alla scelta (λ,λ').
Quindi r ed r' sono complanari se e solo se $\exists\, \ell,\ell',\lambda,\lambda'$ tali che

$$\pi_{(\ell,\ell')} = \pi_{(\lambda,\lambda')} .$$

Concludete l'esercizio da questo punto.

Esercizio 7. Utilizzando le vostre conoscenze sui sistemi lineari, dimostrate che se r e ρ sono complanari allora

$$r=\rho, \qquad r\cap\rho=P, \qquad r//\rho$$

a seconda che si abbia rispettivamente

$$rg \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = rg \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 2 \,,$$

$$rg\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = rg\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 3\ ,$$

$$rg\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = 3 \quad rg\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 2$$

Esercizio 8. Verificare che se r e ρ sono date in forma ridotta

$$\begin{cases} x = lz + p \\ y = mz + q \end{cases} \qquad \begin{cases} x = l'z + p' \\ y = m'z + q' \end{cases}$$

allora r è complanare a ρ sse la matrice

$$\begin{vmatrix} l - l' & p - p' \\ m - m' & q - q' \end{vmatrix}$$

ha determinante uguale a zero.

Esercizio 9. Determinare le equazioni cartesiane della retta $\widetilde{r}$ parallela alla retta r di equazioni

$$\begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

e complanare alle rette sghembe s e t di equazioni rispettivamente

$$\begin{cases} x + 2z - 1 = 0 \\ y - z - 3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - z - 2 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Suggerimento: utilizzare il risultato dell'esercizio precedente.

Esercizio 10. Decidere se le due rette:

$$\begin{cases} x + 1 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases} , \qquad \begin{cases} 2x + y - 2z + 6 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

sono complanari. In caso affermativo, stabilire se sono incidenti o parallele e determinare l'equazione del piano che le contiene.