Algebra Lineare. Gruppo I-Z. Prof. P. Piazza
Compito pomeridiano del 18/12/02

Esercizio 1. Consideriamo lo spazio affine $\mathcal{A}^3$ con riferimento $RA(O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ fissato e coordinate associate (x, y, z).
Determinare l' equazione cartesiana del piano π passante per il punto Q di coordinate $(0, 0, 1)$ e per la retta r di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - z = 2 \\ y + 3z = 4 \end{cases} .$$

Esercizio 2. Scrivere equazioni parametriche e cartesiane per la retta s passante per $P = (0, 0, 1)$ e parallela alla retta r di equazione cartesiane

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x - 3y - z = 2 \end{cases}$$

Riassunto della lezione del 17/12/02.
Sia $\mathcal{V}_O$ lo spazio vettoriale tridimensionale dei vettori centrati in O. Fissiamo una base *ortonormale* $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ con coordinate associate (x, y, z). Vi ricordo che il prodotto scalare di due vettori $\underline{v}$, $\underline{w}$ è per definizione il numero reale:

$$< \underline{v}, \underline{w} >= ||\underline{v}|| \, ||\underline{w}|| \cos \widehat{\underline{v}\underline{w}} \, .$$

Si noti che allora

$$||\underline{v}||^2 =< \underline{v}, \underline{v} >$$

e che

$$\cos \widehat{\underline{v}\underline{w}} =< \underline{v}, \underline{w} > / \sqrt{< \underline{v}, \underline{v} >} \cdot \sqrt{< \underline{w}, \underline{w} >} \quad \text{se} \quad \underline{v} \neq \underline{0}, \underline{w} \neq \underline{0} \, .$$

Abbiamo poi verificato che se $\underline{v} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ e $\underline{w} = x'\underline{i} + y'\underline{j} + z'\underline{k}$ allora

$$< \underline{v}, \underline{w} >= xx' + yy' + zz' \, .$$

In particolare $||\underline{v}||^2 = x^2 + y^2 + z^2$ e

$$\cos \widehat{\underline{v}\underline{w}} = (xx' + yy' + zz')/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}$$

Vi ricordo anche che il vettore

$$\frac{< \underline{v}, \underline{w} >}{< \underline{w}, \underline{w} >} \underline{w}$$

rappresenta la proiezione ortogonale del vettore $\underline{v}$ sulla retta individuata dal vettore $\underline{w}$. Se $\underline{w}$ è unitario (e cioè $||\underline{w}|| = 1$) allora tale proiezione è data semplicemnte da $(< \underline{v}, \underline{w} >)\underline{w}$. Infine se $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3\}$ è una qualsiasi base di $\mathcal{V}_O$ allora la sua base *ortogonalizzata* secondo il procedimento di Gram-Schmidt è la base $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ con $\underline{u}_1 = \underline{w}_1$,

$$\underline{u}_2 = \underline{w}_2 - \frac{< \underline{w}_2, \underline{u}_1 >}{< \underline{u}_1, \underline{u}_1 >} \underline{u}_1$$

$$\underline{u}_3 = \underline{w}_3 - \frac{< \underline{w}_3, \underline{u}_1 >}{< \underline{u}_1, \underline{u}_1 >} \underline{u}_1 - \frac{< \underline{w}_3, \underline{u}_2 >}{< \underline{u}_2, \underline{u}_2 >} \underline{u}_2$$

Una base *ortonormalizzata* è invece

$$\{ \frac{1}{||\underline{u}_1||} \underline{u}_1, \frac{1}{||\underline{u}_2||} \underline{u}_2, \frac{1}{||\underline{u}_3||} \underline{u}_3 \} \, .$$

Esercizio 3. Sia $W = \mathbb{R}(1, -1, 1)$ (Vi ricordo la notazione $\mathbb{R}(l, m, n)$ per il sottospazio $\text{Span}(l, m, n)$.) Determinare un versore di questa retta. Determinare il versore di questa retta che forma un angolo acuto con il vettore della base $\underline{j}$.

Esercizio 4. Sia W la retta vettoriale di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Determinare i vettori di W che hanno lunghezza uguale a 2.

Esercizio 5. Determinare le coordinate dei vettori $\underline{v}$ che hanno lunghezza uguale a 2 e sono ortogonali sia a $\underline{f} = (1, -1, 2)$ che a $\underline{g} = (0, 1, -1)$.

Osservazione. I vettori di lunghezza 2 sono anche i vettori il cui quadrato della lunghezza è 4.

Esercizi per casa.

Esercizio 6. Consideriamo il piano vettoriale σ di equazione cartesiana

$$x + 2y - z = 0$$

Verificare che i vettori

$$\underline{f}_1 = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}, 0) \qquad \underline{f}_2 = (\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}})$$

costituiscono una base *ortonormale* di σ.
(ii) Decomporre il vettore $\underline{u} = (0, 1, 2)$ del piano σ nella somma $\underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2$ con $\underline{u}_1 \in \mathbb{R}\underline{f}_1$ e $\underline{u}_2 \in \mathbb{R}\underline{f}_2$. [1]

Esercizio 7. Spazio vettoriale $\mathcal{V}_O$ con base ortonormale $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ fissata e coordinate associate (x, y, z).
Applicare il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt alla seguente base di $\mathcal{V}_O$:

$$\underline{w}_1 = (1, 1, 0)\,, \quad \underline{w}_2 = (0, 1, 0)\,, \quad \underline{w}_3 = (0, 0, 2)\,.$$

[1] *Suggerimento per (ii).* Sappiamo che $\underline{u} \in \sigma$. Quindi esistono coefficienti α e β tali che $\underline{u} = \alpha\underline{f}_1 + \beta\underline{f}_2$ e per definizione sarà $\underline{u}_1 = \alpha\underline{f}_1$, $\underline{u}_2 = \beta\underline{f}_2$. Utilizzare il fatto che $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$ è una base ortonormale di σ e le proprietà di linearità del prodotto scalare per dimostrare che $< \underline{u}, \underline{f}_1 >= \alpha$ e che $< \underline{u}, \underline{f}_2 >= \beta$. Questo ragionamento è stato già fatto quando si è parlato della ortonormalizzazione di Gram-Schmidt.