Algebra Lineare. Gruppo I-Z. Prof. P. Piazza

Compito pomeridiano del 16/10/02

Esercizio 1. Scrivere il vettore di $\mathbb{R}^4$ che è combinazione lineare dei vettori

$$\underline{v}_1 = (1,0,0,3)\ , \quad \underline{v}_2 = (-1,1,0,1) \quad \underline{v}_3 = (0,1,0,1)$$

con pesi rispettivamente $2, 1, -3$.

Esercizio 2. Stabilire se i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ dell'esercizio precedente sono linearmente indipendenti.

Esercizio 3. Stabilire se il vettore

$$\underline{v} = (1,3,1,-6)$$

appartiene a Span$(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$.

Esercizio 4. Siano $A \in M_{15}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{51}(\mathbb{R})$ definite come segue:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \sqrt{2} & 1 \end{vmatrix}\ ; \qquad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}\ .$$

Calcolare AB e BA.

Esercizio 5. Calcolare $C = AB$ con

$$A = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}\ ; \qquad B = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 \\ \pi & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\ .$$

Esercizio 6.

Consideriamo il seguente sistema omogeneo di 3 equazioni in 6 incognite.

$$\begin{cases} x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 + \frac{1}{2}x_6 = 0 \\ 2x_4 - x_6 = 0 \\ x_5 + 4x_6 = 0 \end{cases}$$

Sia Σ_0 l'insieme delle soluzioni di questo sistema.

6.1 Scrivere questo sistema in forma compatta, utilizzando il prodotto righe per colonne delle matrici.

6.2 Risolvere il sistema, scrivendo la generica soluzione $\underline{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_5, \xi_6)$ in funzione delle variabili libere.

6.3. Scrivere la generica soluzione come combinazione lineare di 3 opportuni vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ in $\mathbb{R}^6$. Possiamo concludere che $\Sigma_0 = \text{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$?

Esercizio 7. Consideriamo il sistema di 3 equazioni in 6 incognite.

$$\begin{cases} x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 + \frac{1}{2}x_6 = 1 \\ 2x_4 - x_6 = 0 \\ x_5 + 4x_6 = 1 \end{cases}$$

Sia Σ l'insieme delle soluzioni di questo sistema.

7.1 Scrivere questo sistema in forma compatta, utilizzando il prodotto righe per colonne delle matrici.

7.2. Risolvere il sistema. Scrivere la generica soluzione in funzione delle variabili libere e dei termini noti. A partire da questa forma verificare che

$$\Sigma = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3) + \underline{\xi}_0$$

per un opportuno vettore $\underline{\xi}_0$ in $\mathbb{R}^6$ e con i $\underline{v}_j$ come nell'esercizio precedente.
7.3. Che relazione c'è fra Σ, Σ_0 e $\underline{\xi}_0$?