

Geometria 1. I^o Modulo. a.a. 00/01. Gruppo E-N
Compito pomeridiano del 14/11/00

Esercizio 1. Sia V lo spazio vettoriale \mathbb{R}^4 e consideriamo il sottoinsieme

$$W' = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\underline{x} = \underline{b}\}$$

con

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 5 \end{vmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{vmatrix}$$

Spiegare perché W' è una sottovarietà affine non vuota. Determinare le equazioni parametriche di W' .

Esercizio 2. Determinare equazioni cartesiane per la sottovarietà affine di \mathbb{R}^4 di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x_1 = -t_1 - 2t_2 + 2 \\ x_2 = 2t_1 + 2t_2 \\ x_3 = -2t_1 - 2t_2 - 1 \\ x_4 = t_1 + 1 \end{cases} \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}^3$. Sono dati i sottospazi

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y+z = 0\}; \quad U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y-z = 0\}.$$

Determinare $U \cap W, U + W$. Vero o falso: $\mathbb{R}^3 = W \oplus U$.

Esercizio 4. Sia $V = M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$. Sia $\mathcal{S}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) = \{A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \mid a_{ij} = a_{ji}\}$ e sia $\mathcal{A}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) = \{A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \mid a_{ij} = -a_{ji}\}$. Dimostrare che $M_{3 \times 3}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

Esercizio 5. Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio

$$W = \text{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4, \underline{v}_5)$$

con

$$\underline{v}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{vmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \underline{v}_4 = \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \underline{v}_5 = \begin{vmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{vmatrix}$$

Estrarre da questi vettori una base di W .