Algebra Lineare. a.a. 2004-05. Gruppo A-H. Prof. P. Piazza
Compito pomeridiano del 13/12/2004

Esercizio 1. Sia V lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con base canonica $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ fissata. Sia P l'applicazione lineare $P : V \longrightarrow V$ definita da

$$P\underline{e}_1 = 2\underline{g}_1 - 2\underline{g}_3 \,, \qquad P\underline{e}_2 = \underline{g}_2 + \underline{g}_3 \,, \qquad P\underline{e}_3 = \underline{g}_1 + \underline{g}_2 + \underline{g}_3 \,, \tag{1}$$

con $\{\underline{g}_1 = (2,0,1)\,, \underline{g}_2 = (1,3,0)\,, \underline{g}_3 = (0,1,2)\}$. È subito visto che questi 3 vettori costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$. Determinare la matrice associata a P in questa base (quindi, base di partenza = base di arrivo = base $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2\, \underline{g}_3\}$).

Esercizio 2. Calcolare il determinante della matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

e determinare per quali valori di k la matrice è invertibile.

Esercizio 3. Consideriamo le matrici

$$A = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ e & f & g & h \\ x & y & z & w \end{vmatrix} \,, \quad B = \begin{vmatrix} a & b & l & m \\ c & d & n & p \\ 0 & 0 & g & h \\ 0 & 0 & z & w \end{vmatrix} \,.$$

Dimostrare che

$$\det B = \det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \det \begin{vmatrix} g & h \\ z & w \end{vmatrix}$$

Cosa possiamo dire circa $\det A$? [1]

Esercizio 4. Verificare che la matrice dei coefficienti del seguente sistema è non singolare. Applicare il teorema di Cramer per determinare l'unica soluzione del sistema.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

Esercizio per casa.

Sia V lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$. Sia π un sottospazio vettoriale di dimensione 2, cioè un piano, ed r una retta non contenuta in π. Si ha $V = r \oplus \pi$. Abbiamo definito due applicazioni lineari: $P_1 : V \to V$, la proiezione su r lungo π e $P_2 : V \to V$, la proiezione su π lungo r.

---

[1] Vale in generale la Proposizione : sia $N \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ e supponiamo che

$$N = \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix}$$

con $A \in M_{k,k}(\mathbb{R})$, $C \in M_{(n-k),(n-k)}(\mathbb{R})$, $B \in M_{k,(n-k)}(\mathbb{R})$, con $k < n$. Allora

$$\det N = \det A \cdot \det C \,.$$

La dimostrazione non è difficile (utilizza l'induzione su k); questo caso generale era uno degli esercizi assegnati per il fine settimana del 12/12/04 (esercizio 9.10 p. 198)

Vi ricordo che P_1 e P_2 sono definite come segue: se $\underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2$ con $\underline{v}_1 \in r$ e $\underline{v}_2 \in \pi$ allora

$$P_1(\underline{v}) = \underline{v}_1 \, , \quad P_2(\underline{v}) = \underline{v}_2$$

Esercizio. Scrivere la matrice associata nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ alla proiezione P_2 sul piano π di equazione $-x_1 + x_2 + x_3 = 0$ parallelamente alla retta $r = \mathbb{R}(1, 2, 1)$. Suggerimento: c'è una base $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ per cui la matrice associata a P_2 è estremamente facile a scriversi. Qual è questa base ?[2] Una volta scritta la matrice associata a P_2 in questa "base speciale", l'esercizio può essere completato utilizzando la formula (8.5) pag. 164.

[2]Per rispondere a questa domanda interrogatevi su come agisce P_2 sui vettori del piano π e sui vettori della retta r.