Geometria 1. I^0 Modulo. a.a. 00/01. Gruppo E-N
Compito pomeridiano del 12/12/00

Esercizio 1.
1.1 Stabilire se la seguente proposizione è vera o falsa:
Un'applicazione lineare $S : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *con* $n > m$ *non può essere iniettiva.*
Giustificate la vostra risposta.
1.2. Stabilire se la seguente proposizione è vera o falsa:
Un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *con* $n < m$ *non può essere suriettiva.*
Giustificate la vostra risposta.

Esercizio 2. Stabilire se la seguente Proposizione è vera o falsa:
Un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *iniettiva è anche suriettiva.*
Giustificare la risposta.

Esercizio 3. $V = \mathbb{R}^3$ con base canonica. Dire se l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita dalla matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

è iniettiva. Dire se è biunivoca.

Esercizio 4. Sia $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla matrice

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

(3.0) Scrivere l'espressione di Q in coordinate.
(3.1) Determinate equazioni cartesiane e parametriche per $\operatorname{Ker}(Q)$ e $\operatorname{Im} Q$. Studiare l'iniettività/suriettività di Q. Determinare la controimmagine del vettore $(2, -1, 5)$.
(3.2) Determinare l'immagine tramite Q della retta di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x^1 - x^3 = 0 \\ x^2 + 2x^3 = 0 \end{cases}$$

(3.3) Determinare equazioni cartesiane per l'immagine del piano π di equazione $x^1 - x^3 = 0$. Qual è la dimensione di $Q(\pi)$?
(3.4) Determinare equazioni parametriche per l'immagine del piano σ di equazione $5x^1 - 3x^2 = 0$. Qual è la dimensione di $Q(\sigma)$?
Confrontare le dimensioni di $Q(\pi)$ e $Q(\sigma)$. C'è qualcosa di strano oppure è tutto OK ?
Cercate di spiegare cosa succede.

Esercizio 5 . Determinare l'espressione in coordinate di un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ che trasformi il vettore $(1, 1) \in \mathbb{R}^2$ nel vettore $(1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ ed abbia nucleo banale (quindi *iniettiva*). Determinare equazioni parametriche e cartesiane per il sottospazio immagine della vostra F. (La risposta non è, ovviamente, unica). Rifate questo esercizio imponendo sempre che F trasformi $(1, 1)$ in $(1, 1, 1)$ ma richiedendo ora che il nucleo sia non banale. Fate delle figure che illustrino le vostre costruzioni.