Algebra Lineare. a.a. 2004-05. Gruppo A-H. Prof. P. Piazza
Compito pomeridiano del 11/10/04

Esercizio 1. Abbiamo enunciato in classe *le formule di addizione e sottrazione*

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta\,, \quad \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta\,.$$

Dedurre da queste *le formule di duplicazione*

$$\cos 2\alpha = \dots\,, \quad \sin 2\alpha = \dots$$

e poi, da queste ultime, le seguenti *formule di bisezione*:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\,, \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

dove il segno è scelto a seconda del quadrante nel quale cade l'angolo $\alpha/2$.

Esercizio 2. Determinare le radici quadrate di $1-i4\sqrt{3}$. (Suggerimento: utilizzare l'Es. 1.)

Esercizio 3. Sia $z = x + iy$. Trovare una condizione necessaria e sufficiente su x ed y affinché z^3 sia reale.

Esercizio 4. Dopo aver scritto in forma trigonometrica il numero $1+i$, si calcoli $(1+i)^{12}$.

Esercizio 5. Determinare le radici quarte dell'unità.

Esercizio 6. Studiare iniettività e suriettività delle seguenti appliczioni:

- $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
  $x \longrightarrow x^2 - 3x + 2$
- $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1]$
  $x \longrightarrow \sin x$
- $f_3 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$
  $x \longrightarrow x + 1$
- $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
  $x \longrightarrow 2x + 5$
- $f_5 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$
  $n \longrightarrow 1/n$
- $f_6 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$
  $x \longrightarrow 2x$

Esercizio 7. Fissate sul piano $\mathcal{A}^2$ individuato dal vostro foglio un riferimento affine $RA(O\,\vec{i}\,\vec{j}\,)$. In questo riferimento disegnate: il punto P di $\mathcal{A}^2$ di coordinate $(1,0)$; il punto di coordinate $(3,-1)$; il vettore $\vec{v}$ di $\mathcal{V}^2_O$ di coordinate $(3,-1)$, il punto Q di coordinate $(2,2)$, il vettore $\vec{w}$ di coordinate $(-2,-1)$, la retta r passante per P e di vettore direttore $\vec{v}$, la retta s passante per Q e di vettore direttore $\vec{w}$.
Procedendo come a lezione determinate le coordinate del punto d'intersezione di r ed s [1].

[1] Un sistema 2×2 può essere risolto facilmente per sostituzione: ricavate un'incognita in funzione dell'altra usando un'equazione; sostituite nella seconda equazione l'espressione trovata ottenendo un'equazione lineare in una sola incognita; la risolvete e risostituite nella prima equazione.