Algebra Lineare. a.a. 2004-05. Gruppo A-H. Prof. P. Piazza
Compito pomeridiano del 10/1/05

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}^2$ il piano vettoriale euclideo con base ortonormale standard $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$. Determinare le equazioni cartesiane della retta vettoriale [1] ortogonale alla retta vettoriale di equazione cartesiana

$$x + 2y = 0\,.$$

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}^3$ con la base ortonormale canonica $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$.
(i) Determinare le coordinate dei vettori $\underline{v} \in V$ che sono complanari a $\underline{f} = (1, -2, 0)$ e $\underline{g} = (2, 0, 1)$, hanno lunghezza uguale a $\sqrt{6}$ e sono ortogonali a $(3, -1, -1)$.
(ii) Detto $\underline{v}_1$ quello, tra i vettori determinati nel punto (i) dell'esercizio, che forma un angolo ottuso con $\underline{e}_2$, determinare le coordinate del vettore proiezione ortogonale di $\underline{v}_1$ sulla retta generata da $\underline{f}$.

Esercizio 3. Determinare l'equazione cartesiana del piano vettoriale [2] π ortogonale alla retta vettoriale r di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}.$$

Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{F} = \{\underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3\}$, con $\underline{f}_1 \in r$ e $\underline{f}_2, \underline{f}_3 \in \pi$.

Esercizio 4. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare canonico e coordinate (x, y, z), si dia un'equazione cartesiana del piano che contiene il punto $P(1, 2, 3)$ ed è perpendicolare alla retta r definita dalle equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ 2x + y + 3z + 1 = 0. \end{cases}$$

Esercizi per casa

Esercizio 1. *Utilizzando il prodotto vettoriale* determinare le coordinate dei vettori $\underline{v}$ che hanno lunghezza uguale a 2 e sono ortogonali sia a $\underline{f} = (1, -1, 2)$ che a $\underline{g} = (0, 1, -1)$.

Esercizio 2. Avete visto l'operazione di prodotto vettoriale di due vettori. In questo esercizio dovete utilizzare quello che avete imparato sul prodotto vettoriale ma anche molte delle nozioni viste durante questo corso di algebra lineare.
Sia $\underline{u}$ il vettore di coordinate $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

(2.1) Determinare l'equazione cartesiana del sottospazio costituito dai vettori di $\mathbb{R}^3$ che sono ortogonali a $\underline{u}$.[3]

Si consideri l'applicazione $T : V \longrightarrow V$ che associa a $\underline{v}$ il vettore $\underline{u} \wedge \underline{v}$, con $\wedge$ uguale al prodotto vettoriale:

$$T\underline{v} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) \wedge \underline{v}.$$

Dalle proprietà del prodotto vettoriale sappiamo che T è lineare.

[1] per retta vettoriale intendiamo un *sottospazio vettoriale* di dimensione 1 in $\mathbb{R}^2$
[2] per piano vettoriale intendiamo un *sottospazio vettoriale* di dimensione 2 in $\mathbb{R}^3$
[3] Brevemente: determinare l'equazione cartesiana del piano vettoriale ortogonale a $\underline{u}$.

(2.1bis) Perché possiamo affermare, senza fare i conti, che $\dim \mathrm{Ker}T \geq 1$? Perché possiamo affermare, senza fare i conti che $\dim \mathrm{Im}\, T \geq 2$? (Suggerimento per la seconda domanda: prendere due vettori fra loro ortogonali nel piano vettoriale ortogonale a $\underline{u} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.) Concluderne che $\dim \mathrm{Ker}T = 1$ e $\dim \mathrm{Im}\, T = 2$.

(2.2) Scrivere equazioni cartesiane per il nucleo $\mathrm{Ker}(T)$ e per per l'immagine $\mathrm{Im}\, T$. Dare una base ortonormale per questi sottospazi.

(2.3) Scrivere la matrice associata a T nella base canonica $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$.

(2.4) (**Facoltativo**) Determinare l'immagine tramite T della retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

Verificare che il piano π di equazione cartesiana $2x + 2y - 3z = 0$ ha immagine tramite T uguale ad un piano e si determini l'equazione cartesiana di tale piano. Verificate poi che il piano σ di equazione cartesiana $2x + y - 3z = 0$ ha invece immagine tramite T uguale ad una retta. Come si spiega questa differenza?

Esercizio 3. Determinare l'equazione cartesiana del piano π di $\mathbb{R}^3$ (dotato della struttura euclidea standard) passante per la retta s di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$$

ed ortogonale al piano σ di equazione $x - y - z = 3$.
Suggerimento: vi ricordo che due piani sono ortogonali se e solo se i 2 vettori ortogonali ai piani sono fra loro ortogonali.