Geometria 1. I^0 Modulo. a.a. 00/01. Gruppo E-N
Compito pomeridiano del 9/1/01

Sia $\mathcal{V}_O$ lo spazio vettoriale tridimensionale dei vettori centrati in O. Fissiamo una base *ortonormale* $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ con coordinate associate (x, y, z). Vi ricordo che il prodotto scalare di due vettori $\underline{v}$, $\underline{w}$ è per definizione il numero reale:

$$< \underline{v}, \underline{w} >= ||\underline{v}||\,||\underline{w}|| \cos \widehat{\underline{v}\underline{w}}\,.$$

Si noti che allora

$$||\underline{v}||^2 =< \underline{v}, \underline{v} > \quad \text{e che} \quad \cos \widehat{\underline{v}\underline{w}} =< \underline{v}, \underline{w} > / \sqrt{< \underline{v}, \underline{v} >} \cdot \sqrt{< \underline{w}, \underline{w} >}\,.$$

Se $\underline{v} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ e $\underline{w} = x'\underline{i} + y'\underline{j} + z'\underline{k}$ allora $< \underline{v}, \underline{w} >= xx' + yy' + zz'$. In particolare $||\underline{v}||^2 = x^2 + y^2 + z^2$ e

$$\cos \widehat{\underline{v}\underline{w}} = (xx' + yy' + zz')/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}$$

Vi ricordo anche che il vettore $(< \underline{v}, \underline{w} > / < \underline{w}, \underline{w} >)\underline{w}$ rappresenta la proiezione ortogonale del vettore $\underline{v}$ sulla retta individuata dal vettore $\underline{w}$. Se $\underline{w}$ è unitario (e cioè $||\underline{w}|| = 1$) allora tale proiezione è data da $(< \underline{v}, \underline{w} >)\underline{w}$.

Esercizio 0. Sia $W = \mathbb{R}(1, -1, 1)$; determinare un versore di questa retta. Determinare il versore di questa retta che forma un angolo acuto con il vettore della base $\underline{j}$.

Esercizio 1. Sia W la retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Determinare i vettori di W che hanno lunghezza uguale a 2.

Esercizio 2. Determinare le coordinate dei vettori $\underline{v}$ di lunghezza uguale a 2 ed ortogonali sia a $\underline{f} = (1, -1, 2)$ che a $\underline{g} = (0, 1, -1)$.

Esercizio 3. Consideriamo il piano vettoriale σ di equazione cartesiana

$$x + 2y - z = 0$$

(i) Verificare che i vettori

$$\underline{f}_1 = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}, 0) \qquad \underline{f}_2 = (\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}})$$

costituiscono una base *ortonormale* di σ.
(ii) Decomporre il vettore $\underline{u} = (0, 1, 2)$ del piano σ nella somma $\underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2$ con $\underline{u}_1 \in \mathbb{R}\underline{f}_1$ e $\underline{u}_2 \in \mathbb{R}\underline{f}_2$.
Suggerimento per (ii). Sappiamo che $\underline{u} \in \sigma$. Quindi esistono coefficienti α e β tali che $\underline{u} = \alpha\underline{f}_1 + \beta\underline{f}_2$ e per definizione sarà $\underline{u}_1 = \alpha\underline{f}_1$, $\underline{u}_2 = \beta\underline{f}_2$. Utilizzare il fatto che $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$ è una base ortonormale di σ e le proprietà di linearità del prodotto scalare per dimostrare che $< \underline{u}, \underline{f}_1 >= \alpha$ etc...