Algebra Lineare. a.a. 2004-05. Gruppo A-H. Prof. P. Piazza
Compito pomeridiano del 6/12/2004

Esercizio 1. Siano V e W due spazi vettoriali e sia $F : V \to W$ un isomorfismo (quindi F è lineare e biettiva). Verificare che F trasforma vettori linearmente indipendenti di V in vettori linearmente indipendenti di W. In particolare F trasforma sottospazi di dimensione k di V in sottospazi di dimensione k di W.

Esercizio 2. Calcolare il prodotto righe per colonne AB, con

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Esercizio 3. Verificare che la matrice

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

è invertibile. Calcolarne l'inversa.
Sia $F = L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da A. Spiegare perché L_A è invertibile. Calcolare l'immagine tramite l'applicazione inversa del vettore $(3, -1, 2)$.

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}^2$ con base canonica $\{\underline{e}_1 := (1, 0), \underline{e}_2 := (0, 1)\}$ fissata; vi faccio notare che le coordinate di $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ rispetto alla base canonica sono proprio $\underline{x}$. Consideriamo una seconda base di $\mathbb{R}^2$ data da

$$\underline{v}_1 = (1, 1), \quad \underline{v}_2 = (1, -1)$$

e siano (y_1, y_2) le coordinate associate a questa base.
Determinare le formule di cambiamento di coordinate

$$\underline{x} = B\underline{y}, \quad \underline{y} = C\underline{x}$$

Che relazione c'è fra B e C ?
Sia U il sottospazio vettoriale di equazione cartesiana $x_1 - 2x_2 = 0$. Determinare l'equazione cartesiana di U nelle coordinate (y_1, y_2).

Esercizio 5. Sia $V = \mathbb{R}^3$. È facile verificare che l'applicazione lineare definita da

$$F(1, 1, 0) = (1, 2, -1), \quad F(0, 1, 1) = (-1, 1, 1), \quad F(0, 0, 1) = (-1, 0, 1)$$

è ben definita [1].
Consideriamo la base canonica

$$\mathcal{E} = \{\underline{e}_1 := (1, 0, 0), \underline{e}_2 := (0, 1, 0), \underline{e}_3 := (0, 0, 1)\}$$

in $\mathbb{R}^3$.
Determinare la matrice A associata ad F con la seguente scelta di basi

$$\text{base di partenza} = \mathcal{E}, \quad \text{base di arrivo} = \mathcal{E}$$

[1] i tre vettori $\{(1, 1, 0); (0, 1, 1); (0, 0, 1)\}$ sono una base di $\mathbb{R}^3$

Vi ricordo che A è la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate nella base di arrivo del trasformato tramite F del j-mo vettore della base di partenza.
Studiare iniettività e suriettività di F.