Algebra Lineare. Gruppo I-Z. Prof. P. Piazza
Compito pomeridiano del 6/11/02

Esercizio 1. Consideriamo il sottospazio $\mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R}) \subset M_{nn}(\mathbb{R})$ delle matrici simmetriche. Consideriamo il sottospazio $\mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R}) \subset M_{nn}(\mathbb{R})$ delle matrici antisimmetriche. Fissiamo $n = 3$. Verificare che $M_{33}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_{33} \oplus \mathcal{A}_{33}$. [1]

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e siano

$$U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 0\}\,, \quad W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}.$$

Decidere se $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.

Esercizio 3. Come l'esercizio 2 ma con $U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$ e $W = \mathrm{Span}((1,1,1))$.

Esercizio 4. Sia $W \subset \mathbb{R}^5$ il sottospazio

$$W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 + x_3 + x_5 = 0\}.$$

Determinare un sottospazio U di $\mathbb{R}^5$ tale che

$$W \oplus U = \mathbb{R}^5\,.$$

(Determinare U vuol dire qui dare U tramite una sua base.) Determinare un secondo sottospazio U' distinto da U ma tale che sia ancora $\mathbb{R}^5 = W \oplus U'$.
Suggerimenti: qual è la dimensione di W ? Che dimensione ci aspettiamo per U?

Esercizio 5. In $\mathbb{R}^4$ sono dati

$$U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\underline{x} = \underline{0}\}\,, \quad , \quad W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid B\underline{x} = \underline{0}\}$$

con

$$A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}\,, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}\,.$$

Verificare se $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

Esercizio 6. In $\mathbb{R}^4$ consideriamo $W = \mathrm{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$ con

$$\underline{w}_1 = (1,2,0,3)\,, \quad \underline{w}_2 = (2,1,,1,2).$$

Determinare una matrice $C \in M_{24}(\mathbb{R})$ tale che $W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid C\underline{x} = \underline{0}\}$.

Esercizio 7. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e siano

$$U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \quad W = \mathrm{Span}((1,0,-1),(1,-2,1)).$$

Determinare una base per $U \cap W$.

Riassunto delle ultime lezioni. Sia V uno spazio vettoriale generato da un numero finito di vettori.

Abbiamo dato la nozione di *sottospazio* $W \subseteq V$ e la nozione di *base* per W.

Abbiamo enunciato e dimostrato il fatto che due basi per W hanno lo stesso numero di elementi e che questo numero è per definizione *la dimensione* di W.

Abbiamo enunciato e giustificato euristicamente i seguenti due teoremi:

- Ogni sottospazio $W \subseteq V$ ammette una base.
- Si ha $0 \le \dim W \le V$ e $\dim W = \dim V$ se e solo se $W = V$.

[1] Potete utilizzare quanto visto la scorsa settimana a proposito di $\mathcal{S}_{33}$ e $\mathcal{A}_{33}$...

Abbiamo visto che n vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale V di dimensione n sono necessariamente una base. Ad esempio 4 vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^4$ sono necessariamente una base.

Abbiamo visto come selezionare una base per un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ dato nella forma $W = \mathrm{Span}(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_N)$. [2]

Abbiamo visto come trovare una base per un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ dato come $W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\underline{x} = \underline{0}\}$. [3]

Abbiamo visto su un esempio come, viceversa, sia possibile rappresentare un sottospazio $W = \mathrm{Span}(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k) \subset \mathbb{R}^n$ come insieme delle soluzioni di un sistema $C\underline{x} = \underline{0}$. Vediamo il procedimento in generale.
Possiamo supporre che i vettori $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k$ siano linearmente indipendenti e quindi che siano una base per W (se i vettori non sono linearmente indipendenti allora estraiamo da questi una base con il metodo del Cap. 2, Sez. 4). Supponiamo W sottospazio proprio; sarà allora $k < n$. Consideriamo la matrice $B \in M_{nk}(\mathbb{R})$ che ha come colonne le coordinate dei vettori $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k$. Per ipotesi questa matrice ha rango k, perché ci sono k colonne linearmente indipendenti ed inoltre k è anche il numero delle colonne di B.
È chiaro che

$$\underline{x} \in W \Leftrightarrow \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_k \text{ non tutti nulli } \mid \underline{x} = \alpha_1 \underline{w}_1 + \dots \alpha_k \underline{w}_k$$

Per la solita osservazione (pag. 37 Oss. 5) possiamo riscrivere questa condizione come

$$\underline{x} \in W \Leftrightarrow \text{ il sistema } B \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{vmatrix} = \underline{x} \text{ ha soluzioni non banali}$$

(Questo è un sistema *non omogeneo* nelle incognite $\alpha_1, \dots, \alpha_k$.) Ora applichiamo EG$\downarrow$ ed il criterio di compatibilità per i sistemi non omogenei (Teorema 3.16, pag 24). Sia quindi S la matrice ridotta di B; dato che $k = \mathrm{rango}\, B$ sappiamo che in S avremo k righe non nulle. Quindi se scriviamo S per righe sarà

$$S = \begin{vmatrix} \underline{s}_1 \\ \vdots \\ \underline{s}_k \\ \underline{0} \\ \vdots \\ \underline{0} \end{vmatrix}.$$

[2] Si veda il Capitolo 2, Sezione 4.

[3] Si risolve il sistema con Gauss. Si scrive la generica soluzione $\underline{\xi}$ in funzione delle variabili libere

$$x_1, \dots, x_{j_1-1}, x_{j_1+1}, \dots, \dots, x_{j_r-1}, x_{j_r+1}, \dots, x_n\,.$$

Si mettono in evidenza le variabili libere e si trovano $k = n - r$ vettori

$$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{j_1-1}, \underline{v}_{j_1+1}, \dots, \dots, \underline{v}_{j_r-1}, \underline{v}_{j_r+1}, \dots, \underline{v}_n\,.$$

Questi vettori sono quindi un insieme di generatori per $W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\underline{x} = \underline{0}\}$; si dimostra (ma noi non l'abbiamo fatto) che questi $n - r$ vettori sono linearmente indipendenti. Si conclude che i vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{j_1-1}, \underline{v}_{j_1+1}, \dots, \dots, \underline{v}_{j_r-1}, \underline{v}_{j_r+1}, \dots, \underline{v}_n$ sono una base per W.

D'altra parte quando operiamo la riduzione di Gauss tenendo conto anche della colonna dei termini noti, cioè quando operiamo su $B|\underline{x}$, otteniamo

$$\left|\begin{array}{c|c} \underline{s}_1 & c_1(x_1,\dots,x_n) \\ \vdots & \vdots \\ \underline{s}_k & c_k(x_1,\dots,x_n) \\ \underline{0} & c_{k+1}(x_1,\dots,x_n) \\ \vdots & \vdots \\ \underline{0} & c_n(x_1,\dots,x_n) \end{array}\right.$$

con

$$c_j(x_1,\dots,x_n) = c_{j1}x_1 + \dots + c_{jn}x_n \text{ per opportuni } c_{j1},\dots,c_{jn} \in \mathbb{R}.$$

Per il criterio di compatibilità abbiamo allora

$$\underline{x} \in W \Leftrightarrow \begin{cases} c_{(k+1)1}x_1 + \dots + c_{(k+1)n}x_n = 0 \\ \dots \\ c_{n1}x_1 + \dots + c_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

Conclusione: se $C \in M_{(n-k)n}(\mathbb{R})$ è la matrice che ha come righe i coefficienti delle equazioni appena scritte si ha

$$W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid C\underline{x} = \underline{0}\}.$$

Abbiamo allora risolto il problema iniziale e cioè:
dato W come Span di k vettori linearmente indipendenti abbiamo trovato una matrice $C \in M_{(n-k)n}(\mathbb{R})$ tale che $W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid C\underline{x} = \underline{0}\}$.

Continuiamo con il *riassunto.*

Dati due sottospazi U e W abbiamo definito il sottospazio intersezione $U \cap W$ ed il sottospazio somma $U + W$.

Abbiamo osservato che se $U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\underline{x} = \underline{0}\}$ e $W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid B\underline{x} = \underline{0}\}$ allora, con ovvia notazione,

$$U \cap W = \begin{cases} A\underline{x} = \underline{0} \\ B\underline{x} = \underline{0} \end{cases}$$

È chiaro che se U e/o W sono dati in termini di una loro base allora occorrerà preliminarmente ridursi al caso in cui entrambi sono dati tramite equazioni, come qui sopra.

Vale la pena osservare che se $U = \mathrm{Span}(\underline{u}_1,\dots,\underline{u}_\ell)$ e $W = \mathrm{Span}(\underline{w}_1,\dots,\underline{w}_k)$ allora

$$U + W = \mathrm{Span}(\underline{u}_1,\dots,\underline{u}_\ell,\underline{w}_1,\dots,\underline{w}_k).$$

Abbiamo enunciato la notevole formula di Grassmann:

$$\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = \dim U + \dim W.$$

Abbiamo dato la definizione di somma diretta, $V = U \oplus W$, ed abbiamo dimostrato che $V = U \oplus W$ se e solo se
(1) $V = U + W$.
(2) $U \cap W = \{\underline{0}\}$

Abbiamo osservato che utilizzando la formula di Grassmann si ha :

$V = U \oplus W$ *se e solo se* $\dim U + \dim W = \dim V$ *e* $U \cap W = \{\underline{0}\}$[4]
Infine abbiamo osservato che vale la seguente
Proposizione. Sia $U = \mathrm{Span}(\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_\ell)$ e $W = \mathrm{Span}(\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_k)$. Allora $U \oplus W = V$ se e solo se $\{\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_\ell, \underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_k\}$ è una base di V.
Questa Proposizione , nella direzione $\Leftarrow$, è particolarmente utile negli esercizi.[5]

[4]Infatti:
$\Rightarrow$: se $V = U \oplus V$ allora già sappiamo che $U \cap V = \{\underline{0}\}$ ed inoltre $\dim V = \dim(U + W) = \dim U + \dim W - 0 = \dim U + \dim W$.
$\Leftarrow$: dall' ipotesi segue che $U + W$ ha dimensione uguale a V ed è quindi uguale a V, inoltre per ipotesi $U \cap W = \{\underline{0}\}$.

[5]Si veda in particolare Es. 2 pag 86. In quel caso abbiamo prima trovato una base per U, sia essa la base $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ pag 254. Poi abbiamo trovato una base per W, sia essa la base $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2\}$. Allora per verificare che $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$ basta verificare che $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{w}_1, \underline{w}_2$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^4$. Ciò non è difficile (basta verificare che sono linearmente indipendenti).