Algebra Lineare. Gruppo I-Z. Prof. P. Piazza
Compito pomeridiano del 4/12/02

Esercizio 1. Utilizzando la nozione di determinante stabilire se la matrice

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

è invertibile ed in caso affermativo calcolarne l'inversa facendo uso del metodo che utilizza l'aggiunta di A.

Esercizio 2. Consideriamo le matrici

$$A = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ e & f & g & h \\ x & y & z & w \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} a & b & l & m \\ c & d & n & p \\ 0 & 0 & g & h \\ 0 & 0 & z & w \end{vmatrix}.$$

Utilizzando l'eliminazione di Gauss verificare che

$$\det B = \det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \det \begin{vmatrix} g & h \\ z & w \end{vmatrix}$$

Cosa possiamo dire circa $\det A$? [1]

Esercizio 3. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Si consideri la matrice $n \times n$

$$A(a,b,n) = \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & \dots & b \\ b & a & b & \dots & \dots & b \\ \vdots & b & a & \dots & \dots & b \\ \vdots & \vdots & b & \dots & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & b \\ b & b & b & \dots & \dots & a \end{vmatrix}.$$

Verificare che $\det A(a,b,n) = \det C(a,b,n)$ con

$$C(a,b,n) = \begin{vmatrix} a & b-a & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b & a-b & b-a & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & a-b & b-a & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & a-b & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & b-a \\ b & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & a-b \end{vmatrix}$$

[1] Vale in generale la Proposizione : sia $N \in M_n(\mathbb{R})$ e supponiamo che

$$N = \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix}$$

con $A \in M_k(\mathbb{R})$, $C \in M_{(n-k)}(\mathbb{R})$, $B \in M_{k(n-k)}(\mathbb{R})$. Allora

$$\det(N) = \det A \cdot \det C.$$

La dimostrazione non è difficile (utilizza il principio d'induzione).

Esercizio 4. Sia $z = x + iy \in \mathbb{C}, z \neq 0$: verificare che
$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{x^2 + y^2}\,.$$
Sia $z = 4 - i \in \mathbb{C}$. Determinare il coniugato $\overline{z}$. Determinare z^{-1}. Determinare $|z|$.

Esercizio 5. Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{C}^3$ (triple di numeri complessi con le naturali operazioni). Consideriamo le applicazioni lineari $F_A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ definite dalla matrice $A \in M_3(\mathbb{C})$
$$A = \begin{vmatrix} 1 & i & 1 \\ 0 & t & i \\ s & -2it & 2 \end{vmatrix}$$
al variare di $s, t \in \mathbb{C}$. Determinare per quali s e t l'applicazione lineare F_A è suriettiva.

Esercizio 6. Sia V lo spazio vettoriale che ha come vettori i numeri complessi, come scalari i numeri complessi e come operazioni quelle indotte dai numeri complessi. Qual è la dimensione di V ?
Sia $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ lo spazio vettoriale che ha come insieme di vettori i numeri complessi, come scalari i numeri reali e come operazioni quelle indotte dai numeri complessi. Verificare che la dimensione di $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ è uguale a due. (Suggerimento: considerare i vettori $\underline{v}_1 = 1$ e $\underline{v}_2 = i$...).
Sia $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ lo spazio vettoriale che ha come insieme di vettori i numeri reali $\mathbb{R}$ e come scalari i numeri razionali $\mathbb{Q}$. Le operazioni sono indotte dalle usuali operazioni sui reali. Dimostrare che $\dim \mathbb{R}_{\mathbb{Q}} \geq 2$ (Suggerimento: considerare i vettori $\underline{v}_1 = 1$ e $\underline{v}_2 = \sqrt{2}$...). [2]

[2] Si può dimostrare, ma non è banale, che $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ ha dimensione infinita.