**Corso di Laurea in Matematica. Geometria 1. a.a. 2019-20.**
**Prof. P. Piazza**
**Alcune osservazioni sule forme bilineari**

## 1. Informazioni generali.

Sia $V$ uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$. Sia

$$b : V \times V \to \mathbb{K}$$

una forma bilineare. Sia $V$ di dimensione $n$ e $\mathcal{B} := \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ una base di $V$. Rimane allora definita la matrice associata a $b(\ ,\ )$ nella base fissata; per definizione questa è la matrice $n \times n$

$$A_b^{\mathcal{B}} \equiv (a_{ij}) := (b(\underline{v}_i, \underline{v}_j))\,.$$

L'espressione della forma bilineare nelle coordinate associate a $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ è data da

$$b(x_1\underline{v}_1 + \cdots + x_n\underline{v}_n\,,\, y_1\underline{v}_1 + \cdots + y_n\underline{v}_n) = \underline{x}^T\, A_b^{\mathcal{B}}\, \underline{y} \tag{1}$$

La verifica di quest'espressione è diretta, usando la bilinearità di $b$. Quindi: $b(\underline{v}, \underline{w}) = \underline{x}^T\, A_b^{\mathcal{B}}\, \underline{y}$ se $\underline{v}$ ha coordinate $\underline{x}$ e $\underline{w}$ ha coordinate $\underline{y}$. Notiamo che per ogni matrice quadrata $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ si ha

$$\underline{x}^T A \underline{y} = \underline{y}^T\, A^T\, \underline{x}\ ;$$

infatti $\underline{x}^T A \underline{y}$ è una matrice $1 \times 1$ e quindi $\underline{x}^T A \underline{y} = (\underline{x}^T A \underline{y})^T$ da cui

$$\underline{x}^T A \underline{y} = \underline{y}^T\, A^T\, (\underline{x}^T)^T = \underline{y}^T\, A^T\, \underline{x}\,.$$

come si voleva. Vediamo allora che $b$ è simmetrica se e solo se $A_b^{\mathcal{B}}$ è simmetrica: infatti, scrivendo l'espressione in coordinate di $b(\underline{w}, \underline{v})$ otteniamo

$$b(\underline{w}, \underline{v}) = \underline{y}^T\, A_b^{\mathcal{B}}\, \underline{x}$$

e questa espressione è uguale a $\underline{y}^T\, (A_b^{\mathcal{B}})^T\, \underline{x} = b(\underline{v}, \underline{w})$ se e solo se $A_b^{\mathcal{B}} = (A_b^{\mathcal{B}})^T$. Qui stiamo usando la seguente osservazione: se $A$ e $B$ sono due matrici in $M_{n\times n}(\mathbb{K})$, allora

$$\underline{x}^T A \underline{y} = \underline{x}^T B \underline{y}\ \ \forall \underline{x}, \forall \underline{y} \in \mathbb{K}^n \ \text{ se e solo se }\ A = B\,.$$

In una direzione è ovvio; per l'altra basta scegliere $\underline{x} = \underline{e}_j$ e $\underline{y} = \underline{e}_k$, con $\underline{e}_i$ l' $i$-mo vettore della base canonica di $\mathbb{K}^n$. Con questa particolare scelta è facile verificare che $\underline{x}^T A \underline{y}$ dà il coefficiente al posto $(jk)$ della matrice $A$; dall'uguaglianza $\underline{x}^T A \underline{y} = \underline{x}^T B \underline{y}$ possiamo concludere che $A$ e $B$ hanno i coefficienti al posto $(jk)$ uguali; dato che $k$ e $j$ erano arbitrari, possiamo concludere che le matrici sono uguali.

Chiamiamo il membro a destra della (1), *l'espressione in coordinate della forma bilineare $b(\ ,\ )$ nella base $\mathcal{B}$.*

**Viceversa**, data una matrice $A = (a_{i\,j})$ ed una base $\mathcal{B}$ possiamo definire una forma bilineare $b_A^{\mathcal{B}} : V \times V \to \mathbb{K}$ ponendo

$$b_A^{\mathcal{B}}(x_1\underline{v}_1 + \cdots + x_n\underline{v}_n\,,\, y_1\underline{v}_1 + \cdots + y_n\underline{v}_n) := \underline{x}^T A \underline{y}\,. \tag{2}$$

Brevemente:

$$b_A^{\mathcal{B}}(\underline{v}, \underline{w}) := \underline{x}^T A \underline{y} \tag{3}$$

se $\underline{v}$ ha coordinate $\underline{x}$ e $\underline{w}$ ha coordinate $\underline{y}$. È facile verificare che $b_A^{\mathcal{B}}$ è una forma bilineare. Ciò segue da tre osservazioni:
(i) il prodotto righe per colonne è distributivo rispetto alla somma;
(ii) l'operazione di trasposizioneè lineare;
(iii) l'applicazione $F_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{K}^n$ che associa ad un vettore le sue coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ è un isomorfismo di spazi vettoriali [1].
Si ha quindi

$$b_A^{\mathcal{B}}(\underline{v}+\underline{v}', \underline{w}) = (\underline{x}+\underline{x}')^T A\underline{y} = (\underline{x}^T+(\underline{x}')^T)A\underline{y} = \underline{x}^T A\underline{y}+(\underline{x}')^T A\underline{y} = b_A^{\mathcal{B}}(\underline{v}, \underline{w})+b_A^{\mathcal{B}}\underline{v}', \underline{w}).$$

Denoteremo a volte questa forma bilineare con $b_A$, omettendo quindi la base $\mathcal{B}$ dalla notazione. Ragionando come prima vediamo che $b_A^{\mathcal{B}}$ è simmetrica se e solo se $A$ è simmetrica.

**Osservazione.** Abbiamo quindi definito una forma bilineare $b_A^{\mathcal{B}}( \, , \, )$ ed è facile verificare che la matrice associata a $b_A^{\mathcal{B}}( \, , \, )$ nella base fissata $\mathcal{B}$ è proprio $A$. Analogamente, è chiaro che se prendiamo $A_b^{\mathcal{B}}$ e ne prendiamo la forma bilineare associata tramite (2) allora riotteniamo proprio $b$.

Esiste quindi una bigezione fra l'insieme delle forme bilineari su $V$, $\mathrm{Bil}(V)$, e l'insieme $M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Infatti l'applicazione $\Phi_{\mathcal{B}} : \mathrm{Bil}(V) \to M_{n\times n}(\mathbb{K})$ definita da

$$\Phi_{\mathcal{B}}(b) := A_b^{\mathcal{B}}$$

ha inversa data da $\Psi_{\mathcal{B}} : M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathrm{Bil}(V)$

$$\Psi_{\mathcal{B}}(A) = b_A^{\mathcal{B}} \, .$$

Il fatto che $\Psi_{\mathcal{B}}(\Phi_{\mathcal{B}}(b)) = b$ e $\Phi_{\mathcal{B}}(\Psi_{\mathcal{B}}(A)) = A$ segue dall'ultima osservazione. (Di fatto $\mathrm{Bil}(V)$ ha una naturale struttura di spazio vettoriale e $\Phi_{\mathcal{B}}$ è un isomorfismo di spazi vettoriali.)

## 2. Matrici congruenti

Sia $\mathcal{F} = \{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_n\}$ un'altra base di $V$. Sia $A_b^{\mathcal{F}}$ la matrice associata a $b( \, , \, )$ in questa base. Il vettore generico $\underline{v}$ ha coordinate $(x_1, \ldots, x_n)$ nella base $\mathcal{B}$ e coordinate $(x_1', \ldots, x_n')$ nella base $\mathcal{F}$. Analogamente $\underline{w}$ ha coordinate $(y_1, \ldots, y_n)$ nella base $\mathcal{B}$ e coordinate $(y_1', \ldots, y_n')$ nella base $\mathcal{F}$. Sia $C$ la matrice del cambiamento di base, dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{F}$. Vi ricordo, che questa è la matrice invertibile che ha come j-ma colonna le coordinate di $\underline{f}_j$ nella base $\mathcal{B}$; abbiamo denotato questa matrice con il simbolo $M_{\mathcal{B},\mathcal{F}}(\mathrm{Id}_V)$. Sappiamo che $\underline{x} = C\underline{x}'$, $\underline{y} = C\underline{y}'$ e quindi

$$b(\underline{v}, \underline{w}) = \underline{x}^T A_b^{\mathcal{B}}\underline{y} = (C\underline{x}')^T A_b^{\mathcal{B}}(C\underline{y}') = (\underline{x}')^T (C^T A_b^{\mathcal{B}} C)\underline{y}'$$

da cui deduciamo

$$(\underline{x}')^T (C^T A_b^{\mathcal{B}} C)\underline{y}' = (\underline{x}')^T A_b^{\mathcal{F}} \underline{y}' \, , \quad \forall \underline{x}', \underline{y}'$$

da cui, infine,

$$A_b^{\mathcal{F}} = C^T \, A_b^{\mathcal{B}} \, C \, . \qquad \text{con } \ C = M_{\mathcal{B},\mathcal{F}}(\mathrm{Id}_V)$$

Diamo ora la seguente

**Definizione.** *Due matrici $A$ e $D$ sono dette congruenti se esiste una matrice invertibile $C$ tale che $D = C^T AC$.*

---

[1] in particolare, le coordinate di $\underline{v} + \underline{v}'$ sono $\underline{x} + \underline{x}'$ e le coordinate di $\alpha\underline{v}$ sono $\alpha\underline{x}$.

Da quanto appena visto concludiamo che *le matrici associate ad una forma bilineare in due basi diverse sono* **congruenti**.

Vale anche il *viceversa*: siano $A$ e $D$ due matrici congruenti, $D = C^T AC$, con $C$ invertibile. Sia $b := b_A^{\mathcal{B}}$ la forma bilineare definita dalla formula (2) nella base $\mathcal{B}$. Sia $\mathcal{F}$ la base che ha come j-mo vettore quello che ha coordinate, nella base $\mathcal{B}$, uguali alla j-ma colonna di $C$; in formule

$$\underline{f}_j := \sum_k c_{kj} \underline{v}_k \,.$$

Abbiamo quindi scelto $\mathcal{F}$ in modo tale che $C = M_{\mathcal{B},\mathcal{F}}(\mathrm{Id}_V)$. Sia $b_D^{\mathcal{F}}$ la forma bilineare simmetrica definita dalla formula (2) (ma, ovviamente, nelle coordinate associate alla base $\mathcal{F}$). Si ha allora

$$b_A^{\mathcal{B}}(\underline{v}, \underline{w}) = \underline{x}^T \, A \, \underline{y} = (C\underline{x}')^T \, A(C\underline{y}') = \underline{x}' D \underline{y}' = b_D^{\mathcal{F}}(\underline{v}, \underline{w})$$

e quindi $b_A^{\mathcal{B}}$ e $b_D^{\mathcal{F}}$ definiscono la stessa forma bilineare: $b_A^{\mathcal{B}} = b_D^{\mathcal{F}}$.
In conclusione:
*$A$ e $D$ sono congruenti se e solo se rappresentano la stessa forma bilineare in basi diverse.*

**Proposizione.** *Due matrici congruenti hanno lo stesso rango.*
*Dimostrazione.* Sia $D = C^T AC$, con $C$ invertibile. Osserviamo che se $A$ è una matrice e $M$ è una matrice invertibile, allora $\mathrm{rg}(MA) = \mathrm{rg}(A)$, perché gli operatori $L_{MA} = L_M \circ L_A$ e $L_A$ hanno immagini della stessa dimensione ($L_M$ è un isomorfismo). Analogamente, se $N$ è invertibile

$$\mathrm{rg}(AN) = \mathrm{rg}((AN)^T) = \mathrm{rg}(N^T A^T) = \mathrm{rg}(A^T) = \mathrm{rg} A \,,$$

dove abbiamo utilizzato noti risultati sul rango e il risultato appena dimostrato per giustificare che $\mathrm{rg}(N^T A^T) = \mathrm{rg}(A^T)$. In definitiva

$$\mathrm{rg}(C^T AC) = \mathrm{rg}(AC) = \mathrm{rg} A$$

come si voleva.

Possiamo allora definire il rango di una forma bilineare $b(\,,\,)$ come il rango di $A_b^{\mathcal{B}}$ con $\mathcal{B}$ una qualsiasi base di $V$. La definizione è ben posta per la Proposizione.